Κεφάλαιο 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός: Έστω $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε *γραμμική εξίσωση* με αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ κάθε εξίσωση της μορφής:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Ορισμός: Κάθε $n-$άδα πραγματικών αριθμών που αν αντικατασταθεί στην θέση των αγνώστων επαληθεύει την εξίσωση, ονομάζεται *λύση* της γραμμικής εξίσωσης.

Ορισμός: Ένα σύνολο m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους ονομάζεται *γραμμικό σύστημα* $m \times n$.

Ορισμός: Κάθε $n-$άδα πραγματικών αριθμών που αν αντικατασταθεί στην θέση των αγνώστων και επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος ταυτόχρονα, ονομάζεται *λύση* του γραμμικού συστήματος.

Ορισμός: Αν ένα σύνολο εξισώσεων περιέχει έστω και μία μη γραμμική εξίσωση, τότε ονομάζεται *μη γραμμικό σύστημα*.

Ορισμός: Δύο συστήματα που έχουν τις ίδιες λύσεις ονομάζονται *ισοδύναμα*.

1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για να επιλύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων μπορούμε να κάνουμε ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω βήματα έτσι ώστε να το οδηγήσουμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα που να επιλύεται εύκολα.

Βήμα 1: Μπορούμε να εναλλάξουμε την θέση δύο εξισώσεων ενός συστήματος. Συμβολίζουμε:

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

Βήμα 2: Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μία εξίσωση ενός συστήματος με έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ. Συμβολίζουμε:

$$E_i \longrightarrow \lambda E_i$$

Βήμα 3: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μία εξίσωση ενός συστήματος με τον εαυτό της συν μία εξίσωση πολλαπλασιασμένη με έναν πραγματικό αριθμό λ. Συμβολίζουμε:

$$E_i \longrightarrow E_i + \lambda E_j$$

Βήμα 4: Μπορούμε να λύσουμε μία εξίσωση ενός συστήματος ως προς έναν άγνωστο και να τον αντικαταστήσουμε σε όλες τις άλλες εξισώσεις του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με την μέθοδο της αντικατάστασης:

i) $\begin{cases} x-2y &= 3 \\ 2x+3y &= -1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x+y &= 23 \\ 2x+3y &= 6 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} y+2-3(x+1) &= 0 \\ 5x-2y &= -4 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3} &= 1 \\ \frac{x}{4}-y &= -7 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

i) $\begin{cases} x+2y &= 5 \\ -2x+y &= -15 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 6-2(y-x) &= y \\ 2(x-y) &= -(5-x) \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} &= 1-y \\ \frac{x-3}{4} &= 1-2y \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \frac{x-2}{4}-\frac{5y-1}{6} &= \frac{3}{2} \\ x+3y &= 1 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

i) $\begin{cases} x-3y &= 2 \\ -2x+6y &= -4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x-y &= 2 \\ 6x-2y &= 4 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 4x+8y &= 9 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 5x-2y &= 3 \\ 15x-6y &= 10 \end{cases}$

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda-3)x-(\mu+1)y &= 1 \\ \mu x+(2\lambda+1)y &= 7 \end{cases}$$

να έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,-3)$.

5. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} x-2y &= 9 \\ ax+\beta y &= \gamma \end{cases}$$

με παραμέτρους $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

(α΄) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους a,β,γ ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1,-4)$.

(β΄) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους a,β,γ ώστε το παραπάνω σύστημα να είναι αδύνατο.

6. Στο δημοτικό parking μίας πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που είναι παρκαρισμένα είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους είναι 2700.

(α΄) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων μα δύο αγνώστους.

(β΄) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

7. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 2x+y=5 \ , \ (\varepsilon_2): -2x+3y=-9 \text{ και } (\varepsilon_3): 3x+2y=7$$

(α΄) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_3).

(β΄) Να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ευθειών (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της ευθείας (ε_1).

8. Σε έναν τριψήφιο αριθμό το πρώτο και το δεύτερο ψηφίο είναι ίδια. Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 25 και αν εναλλάξουμε την θέση του δεύτερου και του τρίτου ψηφίου παίρνουμε έναν τριψήφιο που είναι μεγαλύτερος από τον αρχικό κατά 9. Ποιός είναι ο τριψήφιος αριθμός;

1.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2×2 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Ορισμός: Η ορθογώνια διάταξη αριθμών $\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ονομάζεται *ορίζουσα* 2×2 ή ορίζουσα δεύτερης τάξης και ισούται:

$$\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = a\delta - \beta\gamma$$

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{cases}$$

- Η ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = a_1\beta_2 - a_2\beta_1$ ονομάζεται *ορίζουσα του συστήματος*.
- Η ορίζουσα $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1$ ονομάζεται *ορίζουσα του αγνώστου* x.
- Η ορίζουσα $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1$ ονομάζεται *ορίζουσα του αγνώστου* y.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.
- Αν $D = 0$ και μία από τις ορίζουσες D_x ή D_y είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $D = D_x = D_y = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Να λύσετε με την μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x - y & = & -13 \\ 2x + 3y & = & 11 \end{array}\right.$ ii) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x + 2y & = & 7 \\ x + y & = & -1 \end{array}\right.$

iii) $\left\{\begin{array}{rcl} \left(\sqrt{2} - 1\right) x + 2\sqrt{2} y & = & -2 \\ \sqrt{2} x + \left(\sqrt{2} + 1\right) y & = & \sqrt{2} - 1 \end{array}\right.$

10. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda + 2) x - y & = & \lambda \\ 3x + (\lambda - 2) y & = & 1 \end{array}\right.$$

11. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda^2 x + 2y & = & \lambda + 4 \\ \lambda x + y & = & \lambda + 1 \end{array}\right.$$

12. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + 2y & = & 1 \\ 6x + (\lambda + 1) y & = & \lambda - 1 \end{array}\right.$$

13. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda (x + 1) & = & y + 1 \\ 4x & = & \lambda (y - 1) \end{array}\right.$$

14. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1) : 2x - y = -1 \text{ και } (\varepsilon_2) : (\lambda - 1) x - y = 6$$

(α΄) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

(β΄) Να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) για $\lambda = 3$.

(γ΄) Υπάρχει τιμή του λ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

15. Δίνεται το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & 1 - \lambda \\ x + 6y & = & \lambda + 2 \end{array}\right.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

(β΄) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ.

(γ΄) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 2x - 4y = 1 - \lambda \ , \ (\varepsilon_2) : x + 6y = \lambda + 2 \text{ και } (\varepsilon_3) : 16x + 16y = 19$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

16. Δίνεται το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a - 1) x + 3y & = & 3 \\ x + (a + 1) y & = & 3 \end{array}\right.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0), τότε $x_0 = y_0$.

(β΄) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε την μορφή τους.

ii. δεν έχει λύση.

(γ΄) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $a = 3$, $a = 2$ και $a = -2$.

17. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x - y &= \lambda - 1 \\ x + 2\lambda y &= \lambda \end{cases}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β΄) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε για την λύση (x_0, y_0) του συστήματος να ισχύει $x_0 - y_0 = 0$.

18. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ενός γραμμικού συστήματος 2×2 με αγνώστους x και y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

Να βρείτε την λύση του συστήματος.

1.4 ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 3×3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+2y-3\omega = -1 \\ 2x-y+4\omega = -2 \\ -3x+4y-5\omega = 15 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-2y+\omega = 3 \\ 2x-3y-\omega = 2 \\ -4x+3y+11\omega = -2 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x-y-\omega = 1 \\ 2x+y-5\omega = -4 \\ x-4y+2\omega = 7 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 2x+3y-5\omega = 10 \\ -3x+2y-\omega = 0 \\ 4x-y+7\omega = -4 \end{cases}$

20. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x-y+\omega = -1 \\ x+y+\omega = 1 \\ x+2y+4\omega = 8 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x-4y+\omega = 5 \\ -3x+5y-3\omega = -2 \\ 5x+2y+4\omega = -4 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x+2y-\omega = 1 \\ x+y-2\omega = 0 \\ -2x-y+\omega = 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x+2y-z = 2 \\ 2x-y+z = -3 \\ x-3y+2z = 0 \end{cases}$

21. Για τις ηλικίες των μελών μίας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω: Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι $11 : 3$ και το άθροισμα των ηλικιών και των τριών είναι 115 έτη.

    (α΄) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

    (β΄) Να βρείτε την ηλικία κάθε μέλους της οικογένειας.

1.5 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x+y = 3 \end{cases}$$

23. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3(x-1)^2+y^2 = 1 \\ 2x+y = 3 \end{cases}$$

24. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} yx^2-5xy = -6y \\ 2x+y = 5 \end{cases}$$

25. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{xy} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

26. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x+y+xy = 3 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^3+y^3 = 9 \\ x+y = 3 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x^2+xy = 2 \\ x-2y = -1 \end{cases}$

27. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 7|x+2|+|3-y| = 31 \\ 3|x+2|-4|3-y| = 0 \end{cases}$$

28. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega} = 3 \\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{x} = 15 \end{cases}$$

29. Δύο τετράγωνα έχουν άθροισμα περιμέτρων 44 και διαφορά εμβαδών 11. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών τους.

30. Ένας άνθρωπος θα κάνει ένα ταξίδι με αυτοκίνητο από την πόλη Α στην πόλη Β οδηγώντας με σταθερή ταχύτητα $\upsilon \frac{km}{h}$. Υπολογίζει πως αν η ταχύτητά του ήταν κατά $8\frac{km}{h}$ μεγαλύτερη θα έφτανε στον προορισμό του 1 ώρα νωρίτερα, ενώ αν η ταχύτητά του ήταν κατά $12\frac{km}{h}$ μικρότερη θα έφτανε στον προορισμό του 2 ώρες αργότερα. Να βρείτε την ταχύτητα, τον χρόνο που διήρκεσε το ταξίδι και την απόσταση των δύο πόλεων.

31. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η περίμετρος είναι 60 και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι 12. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μονοτονία συναρτήσεων

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Μία συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ακρότατα συναρτήσεων

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0) \ \text{, για κάθε } x \in A$$

Το x_0 λέγεται **θέση ελαχίστου**, το $f(x_0)$ λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε $minf(x)$.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \ \text{, για κάθε } x \in A$$

Το x_0 λέγεται **θέση μεγίστου**, το $f(x_0)$ λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε $maxf(x)$.

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μίας συνάρτησης f λέγονται **ολικά ακρότατα** της f. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει και από τα δύο είδη ακροτάτων ή να έχει μόνο ένα από τα δύο ή να μην έχει κανένα από τα δύο.

Άρτιες-περιττές συναρτήσεις

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι είναι **άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

$$-x \in A \ \text{ και } \ f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι είναι **περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

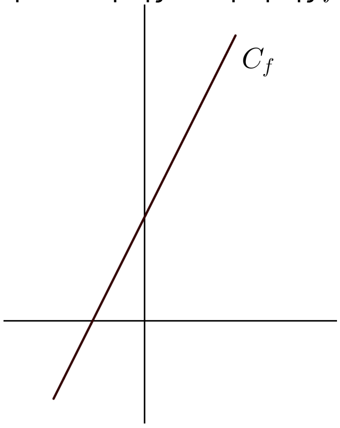
$$-x \in A \ \text{ και } \ f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

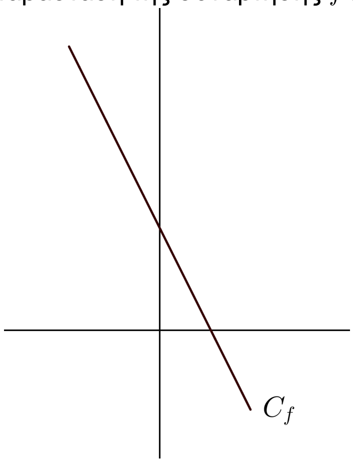
Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=ax+\beta$

Σχήμα 2.1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)=ax+\beta$ όταν $a>0$

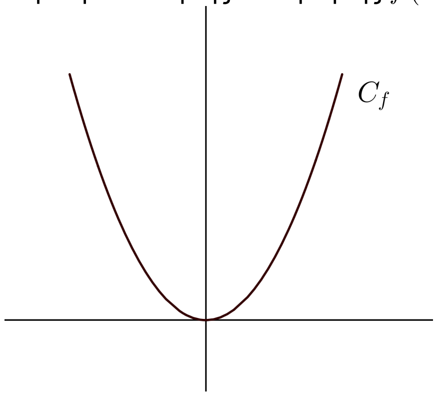


Σχήμα 2.2: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)=ax+\beta$ όταν $a<0$

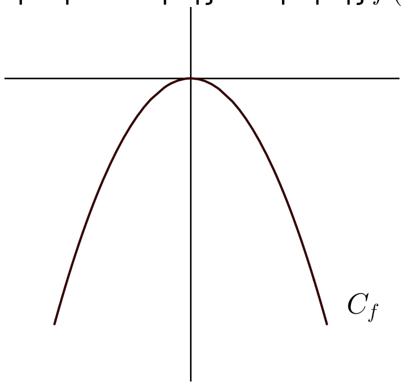


Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$

Σχήμα 2.3: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ όταν $a > 0$

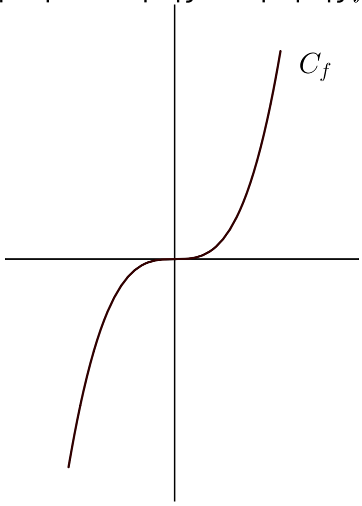


Σχήμα 2.4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ όταν $a < 0$

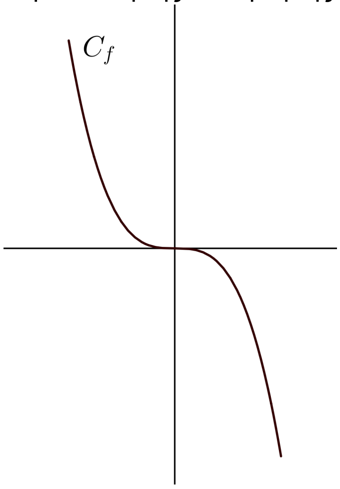


Η συνάρτηση $f\left(x\right)=ax^{3}$

Σχήμα 2.5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)=ax^{3}$ όταν $a>0$

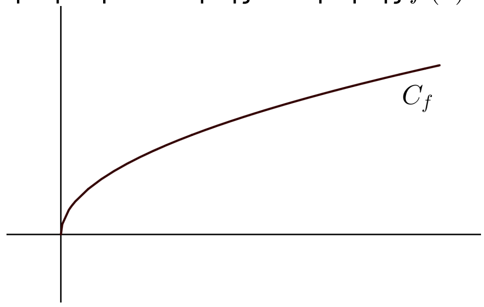


Σχήμα 2.6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)=ax^{3}$ όταν $a<0$

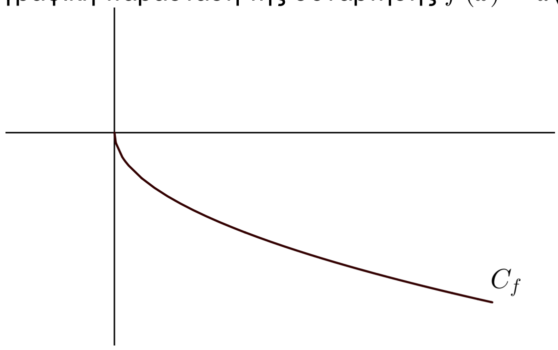


Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$

Σχήμα 2.7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a\sqrt{x}$ όταν $a > 0$

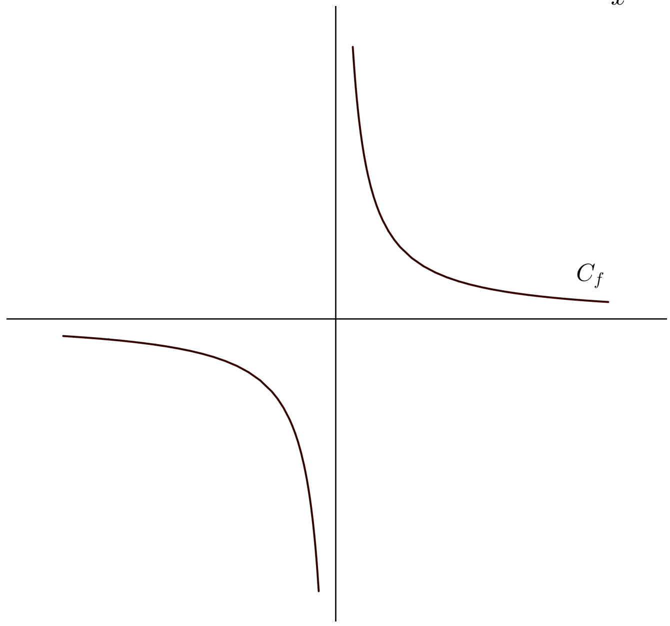


Σχήμα 2.8: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a\sqrt{x}$ όταν $a < 0$

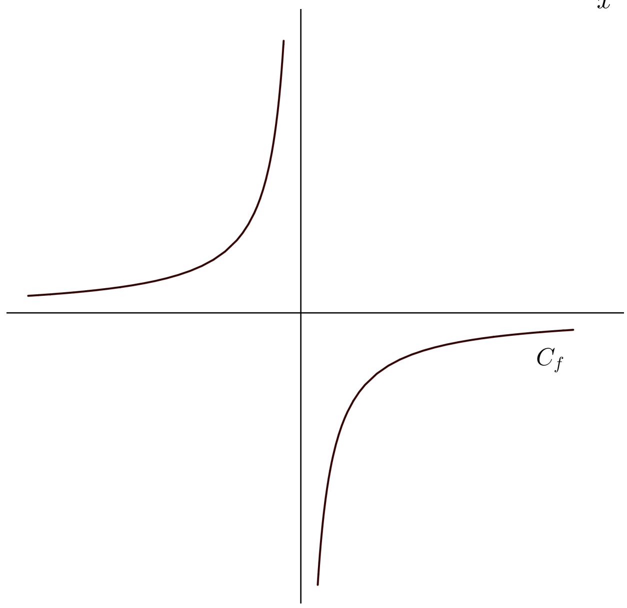


Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{a}{x}$

Σχήμα 2.9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{a}{x}$ όταν $a > 0$

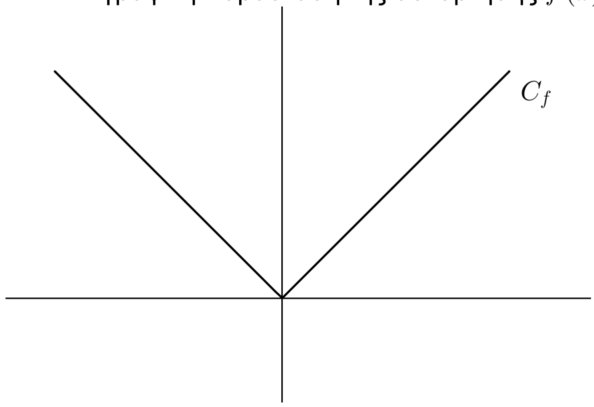


Σχήμα 2.10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{a}{x}$ όταν $a < 0$



Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

Σχήμα 2.11: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$



Μετατόπιση γραφικών παραστάσεων

Έστω μία συνάρτηση f με γραφική παράσταση C_f. Τότε:

1) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x) + c \ \ , \ \ \text{με} \ \ c > 0$$

προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά c μονάδες προς τα πάνω.

2) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x) - c \ \ , \ \ \text{με} \ \ c > 0$$

προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά c μονάδες προς τα κάτω.

3) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x - c) \ \ , \ \ \text{με} \ \ c > 0$$

προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

4) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x + c) \ \ , \ \ \text{με} \ \ c > 0$$

προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

    i) $f(x) = 2x + 1$ ii) $f(x) = -x^3 + 2$ iii) $f(x) = \sqrt{x-1} - 1$

33. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

    i) $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii) $f(x) = x^3 + x$ iii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

34. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι: $f(x) \leq 1$

(β΄) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;

(γ΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

35. Δίνεται η συνάρτηση:

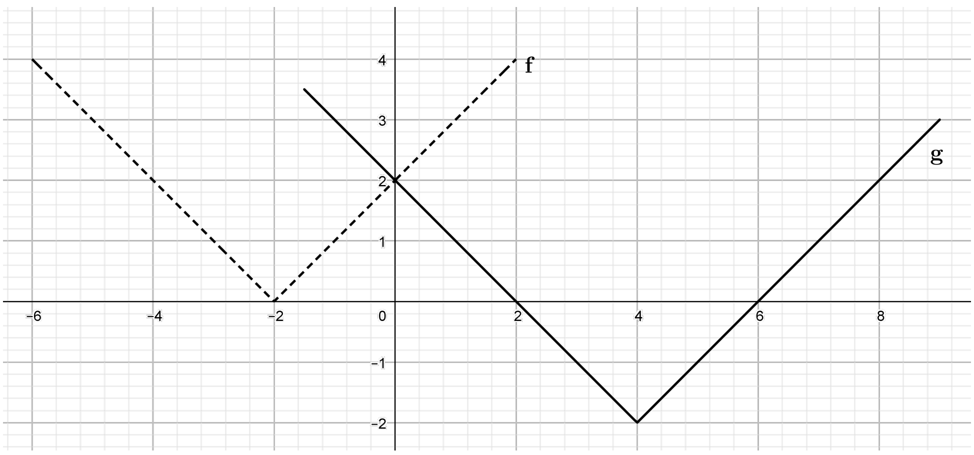
$$f(x) = x^2 - 5 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι f η παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

(β΄) Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ΄) Με ποιά μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της f;

36. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g που ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις που σας δίνονται να βρείτε:



(α΄) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακροτάτου της, την θέση και την τιμή του.

(β΄) Ποιές μετατοπίσεις της δίνουν την g; Αν $f(x) = |x+2|$,να προσδιορίσετε τον τύπο της g.

37. Δίνεται η συνάρτηση:

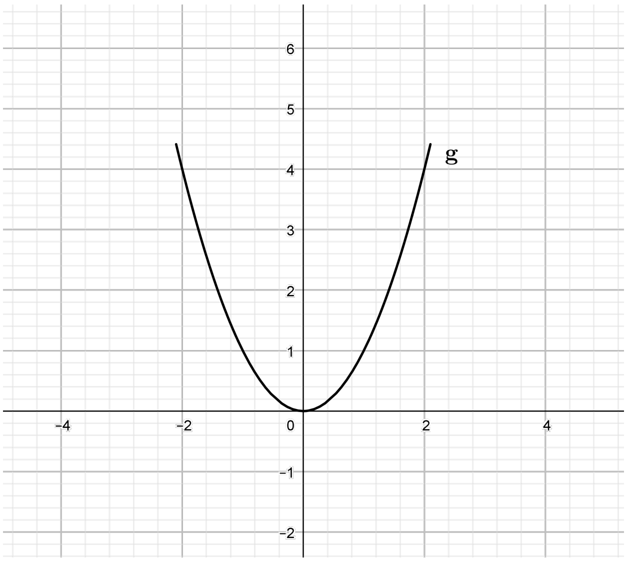
$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

(β΄) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και να βρείτε την θέση και την τιμή του ελαχίστου.

(γ΄) Στο παρακάτω σχήμα σας δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$.

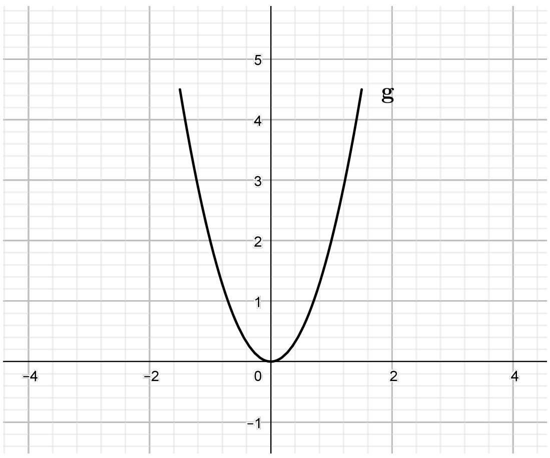


Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

38. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Στο παρακάτω σχήμα σας δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$.

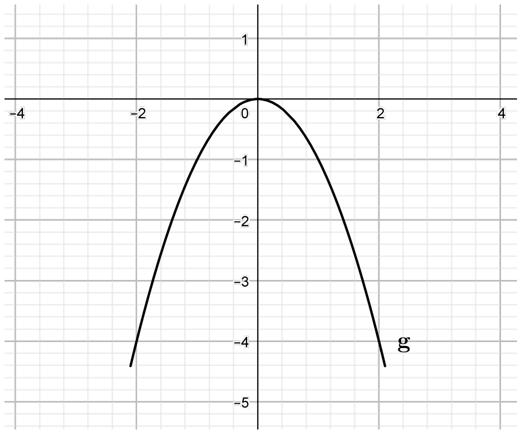


Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

39. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Στο παρακάτω σχήμα σας δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$.



(α΄) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

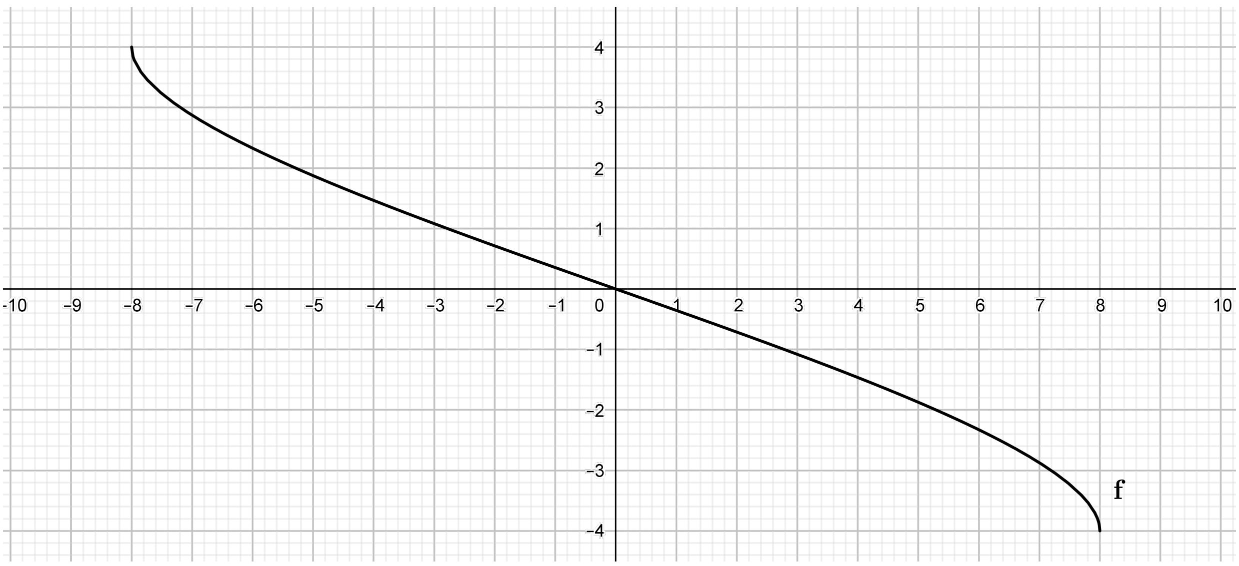
(β΄) Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της f που σχεδιάσατε, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f, το ολικό της ακρότατο και την θέση στην οποία εμφανίζεται και στην συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f\left(x\right)=k$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού k.

40. Στο παρακάτω σχήμα σας δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f\left(x\right)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$$



Με βάση την γραφική παράσταση της f :

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

(β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της καθώς και τις θέσεις στις οποίες αυτά εμφανίζονται.

(γ΄) Η εξίσωση:

$$\sqrt{8-x}=2+\sqrt{8+x}$$

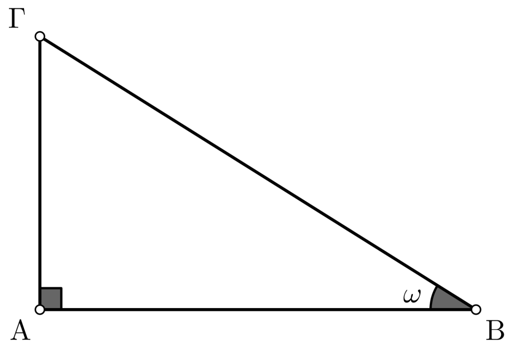
έχει λύση στο $\mathbb{R}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας, προσδιορίζοντας και το διάστημα των πραγματικών αριθμών με άκρα ακεραίους στο οποίο ανήκει η λύση, εφόσον φυσικά υπάρχει.

Κεφάλαιο 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.



Τότε ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$$

3.2 Ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Ορισμός: Γωνία ενός *ακτινίου* (1 rad) είναι η γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

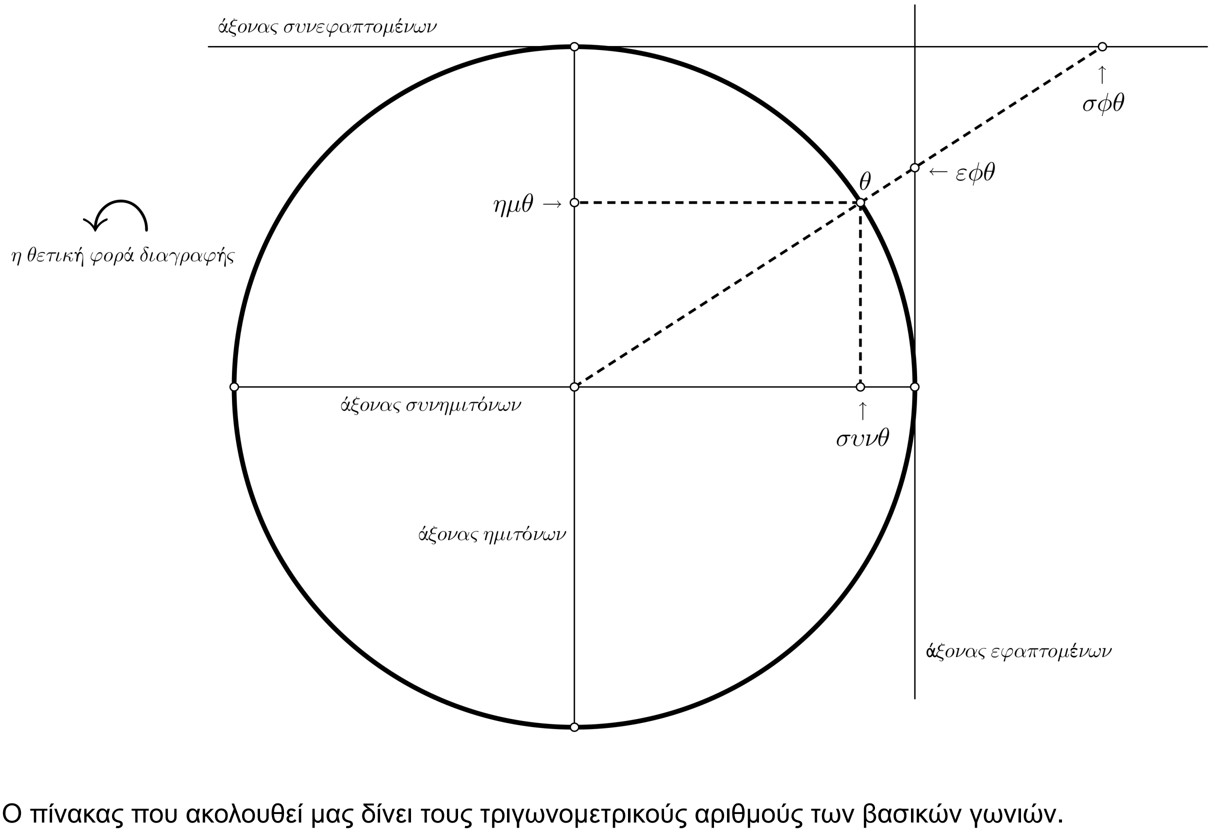
Σχέση μοιρών και ακτινίων: Αν μία γωνία είναι ίση με μ° μοίρες και $a\ rad$ τότε ισχύει η ισότητα:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

Επομένως για ορισμένες βασικές γωνίες που θα χρησιμοποιούμε συχνά:

Γωνία σε μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Γωνία σε ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Ο τριγωνομετρικός κύκλος: Με κέντρο την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και με ακτίνα $\rho = 1$ γράφουμε κύκλο. Στον κύκλο αυτό θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης γωνιών το σημείο του $(1, 0)$ και ορίζουμε ως θετική φορά διαγραφής αυτή που είναι αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται *τριγωνομετρικός κύκλος*. Πάνω σε αυτόν τον κύκλο και για κάθε γωνία θ θα ορίσουμε τέσσερις βασικούς αριθμούς: το ημίτονο, το συνημίτονο, την εφαπτομένη και την συνεφαπτομένη της γωνίας θ, όπως εξηγείται στο ακόλουθο σχεδιάγραμμα.



Ο πίνακας που ακολουθεί μας δίνει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των βασικών γωνιών.

Γωνία σε μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°
Γωνία σε ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ημίτονο	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνημίτονο	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφαπτομένη	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
συνεφαπτομένη	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3.3 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

(α΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1$$

(β΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

(γ΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

(δ΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ισχύει:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

(ε΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\ , k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta = 1$$

(ϛ΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

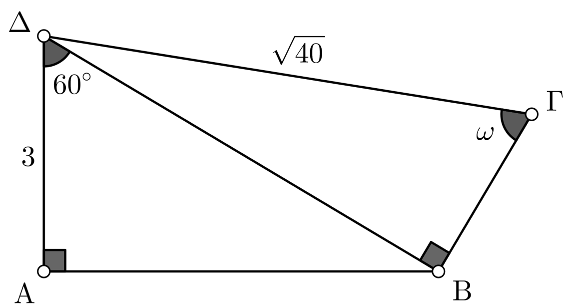
$$1 + \varepsilon\varphi^2\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

(ζ΄) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ισχύει:

$$1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41. Με βάση το σχήμα που ακολουθεί, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.



42. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

43. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

44. Αν $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

45. Αν $16\sigma\upsilon\nu^2\phi - 2 = 0$ και $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ϕ.

46. Αν $270° < x < 360°$ και $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$, να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi x$.

47. Αν $\eta\mu x = -\frac{2}{3}$ και $180° < x < 270°$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$T = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x}$$

48. Αν $3\eta\mu^2\omega - 1 = 0$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\varepsilon\varphi\omega}$$

49. (α΄) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\ ,\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\ ,\ \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

(β΄) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς :

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) \text{ και } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$$

50. Να διατάξετε τους αριθμούς $\eta\mu 1,\ \eta\mu 2$ και $\eta\mu 3$ από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

51. Αν $7\pi < x < \frac{15\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\varphi x - \sigma\upsilon\nu x > \eta\mu x - \varepsilon\varphi x$$

52. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\theta - \eta\mu^4\theta = 2\sigma\upsilon\nu^4\theta - 1$

iii) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

iv) $\frac{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi y}{\varepsilon\varphi y + \sigma\varphi x} = \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}$

53. Να αποδείξετε ότι:

i) $3 + 2\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 5$

ii) $\dfrac{1}{\eta\mu x} - \dfrac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \sigma\varphi x$

iii) $\dfrac{1}{\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta} = \dfrac{1 + \sigma\varphi^2 x}{1 - \sigma\varphi^2 x}$

iv) $\sigma\varphi^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = \sigma\varphi^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$

54. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^3\omega - \sigma\upsilon\nu^3\omega = (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)(1 + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega)$

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$

iii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = 2$

iv) $\dfrac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega} = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega + 1}{\varepsilon\varphi\omega - 1}$

55. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} = \dfrac{1 - \varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi\omega}$

ii) $\left(1 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}\right)\left(1 + \dfrac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = 2$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x - 1}{\varepsilon\varphi^2 x + 1} = \eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x$

iv) $\dfrac{\eta\mu^3\theta + \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\theta$

56. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\eta\mu a} - \eta\mu a\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu a} - \sigma\upsilon\nu a\right)(\varepsilon\varphi a + \sigma\varphi a) = 1$$

57. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1 + \varepsilon\varphi^{11} x}{1 + \sigma\varphi^{11} x} = \left(\frac{1 + \varepsilon\varphi x}{1 + \sigma\varphi x}\right)^{11}$$

58. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{\dfrac{1}{\eta\mu\theta} - \sigma\varphi\theta}{\dfrac{1}{\eta\mu\theta} + \sigma\varphi\theta}} = \left|\frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}\right|$$

59. Να αποδείξετε ότι:

i) $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$

ii) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \leq \dfrac{1}{2}$

iii) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x \geq \dfrac{1}{2}$

60. Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\phi + 2\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\phi \leq 2$$

3.4 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Για την αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο ακολουθούμε τους παρακάτω κανόνες:

Περίπτωση 1: Για παραστάσεις της μορφής:

$$\text{τριγωνομετρικός αριθμός } (k\pi \pm x) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

το αποτέλεσμα είναι ο ίδιος τριγωνομετρικός αριθμός του x με πρόσημο ίδιο με το πρόσημο που έχει ο τριγωνομετρικός αριθμός στο τεταρτημόριο που ανήκει το $k\pi \pm x$, θεωρώντας ότι το x χωράει σε ένα τεταρτημόριο.

Περίπτωση 2: Για παραστάσεις της μορφής:

$$\text{τριγωνομετρικός αριθμός } \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x\right) \quad , \quad k \text{ περιττός ακέραιος}$$

το αποτέλεσμα είναι τριγωνομετρικός αριθμός του x ως εξής: το ημίτονο γίνεται συνημίτονο και ανάποδα, η εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη και ανάποδα και το πρόσημο ίδιο με το πρόσημο που έχει ο αρχικός τριγωνομετρικός αριθμός στο τεταρτημόριο που ανήκει το $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x$, θεωρώντας ότι το x χωράει σε ένα τεταρτημόριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

61. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{4\pi}{3}$.

62. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{7\pi}{4}$.

63. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{11\pi}{6}$.

64. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 960°.

65. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\pi-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu\left(13\pi+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-x\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)}=-1$$

66. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$S=\frac{\eta\mu\left(\pi-x\right)\cdot\varepsilon\phi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\sigma\phi\left(\pi-x\right)}$$

67. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$T=\frac{\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\varepsilon\phi^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\phi^3\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$$

68. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$U=\eta\mu^2\left(\pi-x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi-x\right)+2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

έχει σταθερή τιμή για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

69. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S=\frac{\eta\mu 495^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 120^\circ+\sigma\upsilon\nu 495^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-120^\circ\right)}{\varepsilon\varphi\left(-120^\circ\right)+\varepsilon\varphi 495^\circ}$$

70. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$Q=\frac{\eta\mu\frac{3\pi}{2}\cdot\varepsilon\phi\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 1000^\circ}{\sigma\phi\frac{5\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-2\pi\right)\cdot\eta\mu 170^\circ}$$

71. Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος:

$$A=\eta\mu 0^\circ+\eta\mu 10^\circ+\eta\mu 20^\circ+\cdots+\eta\mu 340^\circ+\eta\mu 350^\circ+\eta\mu 360^\circ$$

72. Αν $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\pi+\theta\right)>2\left(1+\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

73. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu A=\eta\mu\left(B+\Gamma\right)$

ii) $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu\left(B+\Gamma\right)=0$

iii) $\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)$

iv) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)$

3.5 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι τέσσερις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις και οι λύσεις τους:

$$i) \quad \eta\mu x = \eta\mu\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = 2k\pi + (\pi - \theta)$$

$$ii) \quad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = 2k\pi - \theta$$

$$iii) \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \theta$$

$$iv) \quad \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \theta$$

όπου σε όλες τις περιπτώσεις $k \in \mathbb{Z}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

74. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) $\varepsilon\phi x = \sqrt{3}$

iv) $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

75. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x = 0$

ii) $\sigma\phi x = -1$

iii) $\eta\mu x = 1$

iv) $\sigma\upsilon\nu x = 2$

v) $2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$

vi) $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

76. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu 2x = -1$

ii) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

iii) $\varepsilon\phi\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

iv) $\varepsilon\phi^2 x = \frac{1}{3}$

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{2}\eta\mu 3x = -1$

ii) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu x$

iii) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

iv) $1 - \sigma\upsilon\nu\left(\pi - x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$

78. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x\left(\sigma\upsilon\nu x + 1\right) = 0$

ii) $\left(1 - \varepsilon\phi x\right)\left(1 + \eta\mu x\right) = 0$

iii) $\left(1 - \eta\mu x\right)\left(2\eta\mu x - \sqrt{3}\right) = 0$

iv) $\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

79. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

iii) $\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4$

iv) $2\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0$

80. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 0$

ii) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 4 + 2\varepsilon\phi x$

iii) $\eta\mu^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

iv) $\varepsilon\phi^2 x - \sigma\phi^2 x = 0$

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

ii) $\eta\mu^2 x = \frac{1}{2}$

iii) $\eta\mu^2 x - 3\left|\eta\mu x\right| + 2 = 0$

iv) $\eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x = 0$

v) $\varepsilon\varphi x - \eta\mu x = 1 - \eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x$

vi) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi x = -2$

82. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

στο διάστημα $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{3}\right)$.

83. Να λύσετε την εξίσωση:

$$-2\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

στο διάστημα $\left[0, 2\pi\right]$.

84. Να λύσετε την εξίσωση:
$$\sigma\varphi x = 2\sigma\upsilon\nu x$$
στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

85. Να λύσετε την εξίσωση:
$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 = 0$$
στο διάστημα $[-1, 3]$.

86. Μία γωνία ω ικανοποιεί την σχέση:
$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$$
Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

87. (α΄) Να αποδείξετε ότι:
$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\pi + x\right) = 0$$
(β΄) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει:
$$\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

88. Να βρείτε γωνία ω για την οποία ισχύουν:
$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \text{ και } \eta\mu\left(\pi - \omega\right) - \eta\mu\left(\pi + \omega\right) = 1$$

89. (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει:
$$\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$
(β΄) Να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

3.6 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται *περιοδική*, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν:

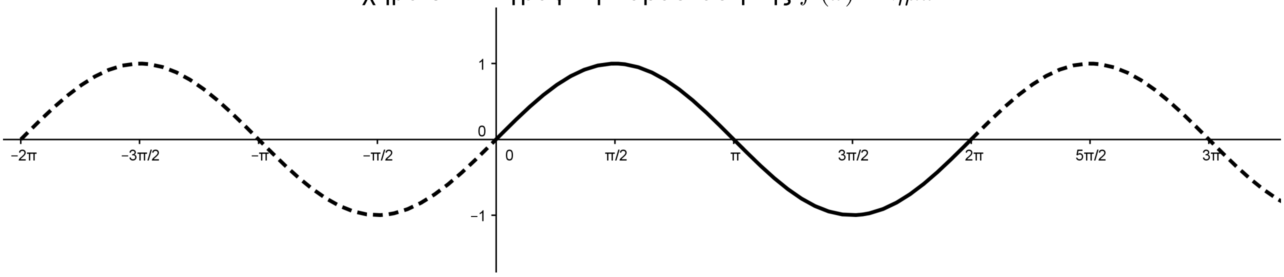
$$i) \quad x + T \in A \text{ και } x - T \in A$$

$$ii) \quad f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός T ονομάζεται *περίοδος* της συνάρτησης f.

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

Σχήμα 3.1: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$

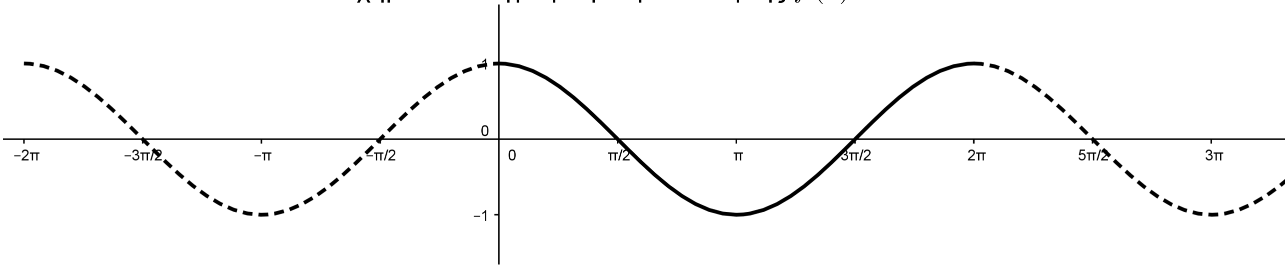


Για την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = 2\pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- έχει μέγιστη τιμή το 1 στην θέση $x_0 = \frac{\pi}{2}$ και ελάχιστη τιμή το -1 στην θέση $x_1 = \frac{3\pi}{2}$.
- είναι περιττή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$

Σχήμα 3.2: Η γραφική παράσταση της $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$

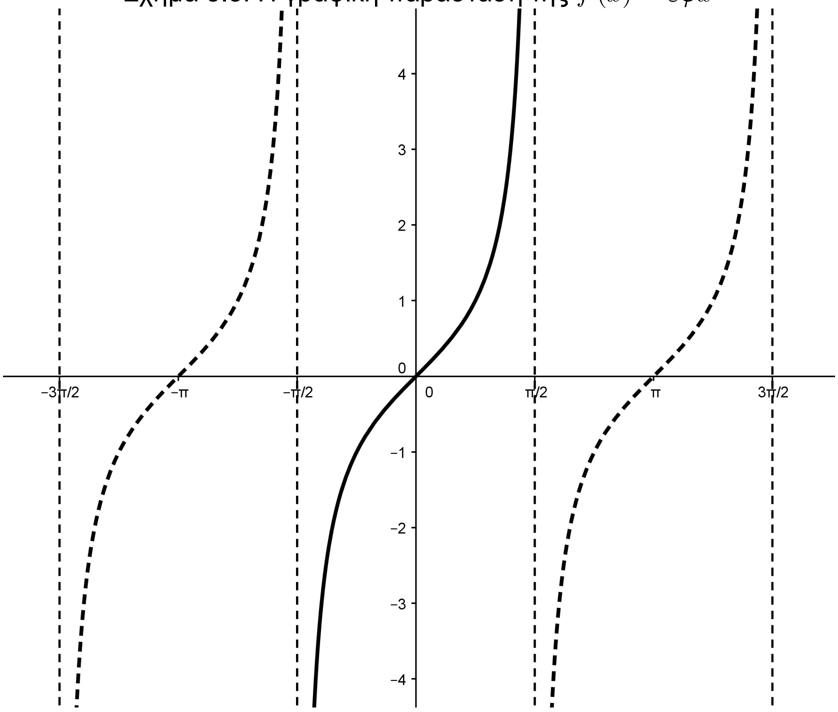


Για την συνάρτηση $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T=2\pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi,2\pi]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi]$.
- έχει μέγιστη τιμή το 1 στις θέσεις $x_0=0$ και $x_1=2\pi$ και ελάχιστη τιμή το -1 στην θέση $x_2=\pi$.
- είναι άρτια συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Σχήμα 3.3: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varepsilon\varphi x$

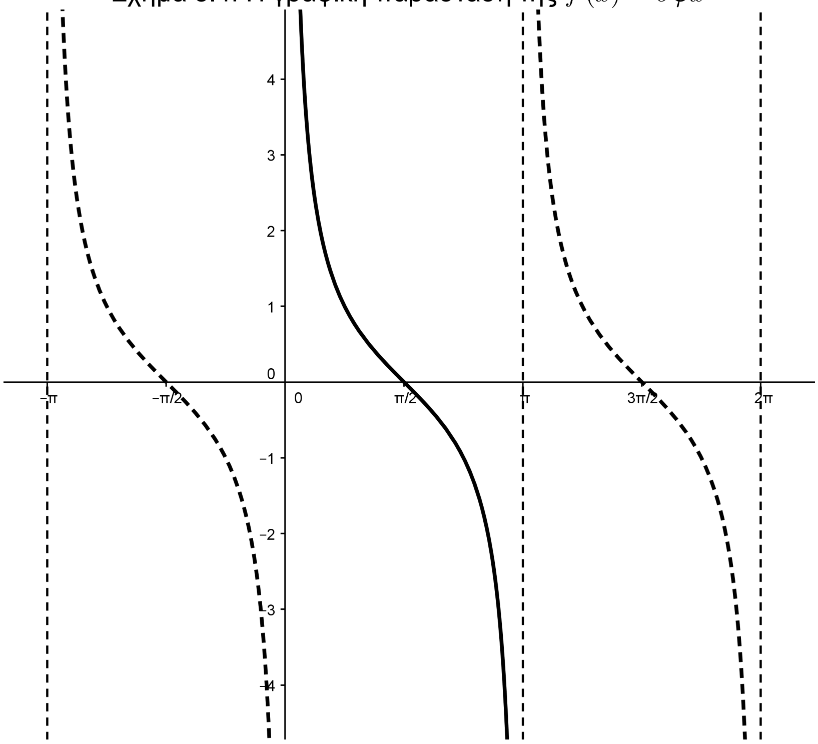


Για την συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = \pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+2)\pi}{2}\right)$, όπου k περιττός ακέραιος.
- δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.
- είναι περιττή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- έχει ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = \frac{k\pi}{2}$, όπου k περιττός ακέραιος.

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$

Σχήμα 3.4: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\varphi x$



Για την συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = \pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(k\pi, (k+1)\pi)$, όπου k ακέραιος.
- δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.
- είναι περιττή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- έχει ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = k\pi$, όπου k ακέραιος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

90. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -2\eta\mu 2x$$

(α΄) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης καθώς και την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(β΄) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$					

Με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα τιμών να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, \pi]$.

(γ΄) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $f(x) = -2$.

91. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$$

(α΄) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(β΄) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

(γ΄) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

92. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -2 + 3\sigma\upsilon\nu 2x$$

(α΄) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(β΄) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

(γ΄) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[0, \pi]$.

93. Δίνεται η συνάρτηση:

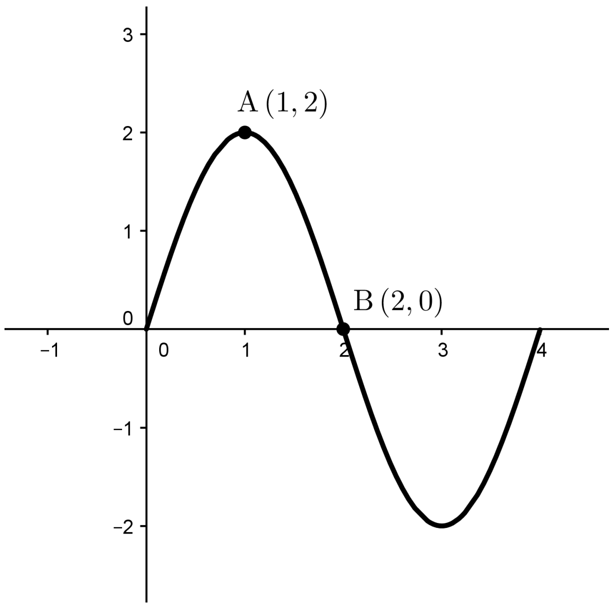
$$f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης, την περίοδό της και να την σχεδιάσετε στο διάστημα $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

94. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = \rho \cdot \eta\mu\left(\frac{ax}{2}\right)$$

στο διάστημα $[0, 4]$.



(α΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς ρ και a.

(β΄) Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

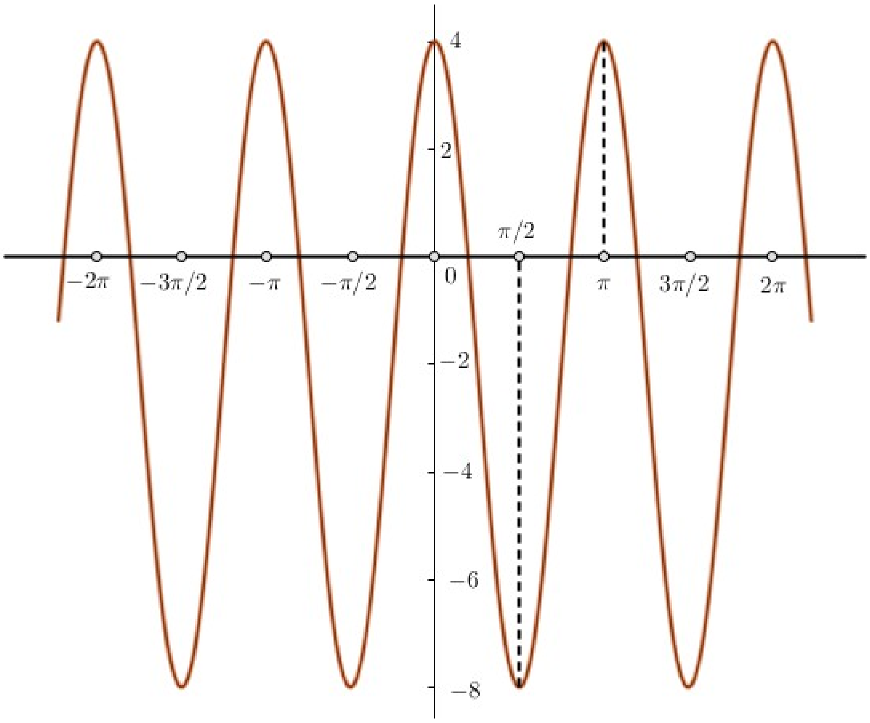
$$f(x) = 2$$

(γ΄) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S = f(8) + f(9) + f(12) + f(13) + f(16) + f(17)$$

95. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, που είναι της μορφής:

$$f(x) = a + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \quad , a, \beta \in \mathbb{R}$$



(α΄) Με βάση την γραφική παράσταση της f, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(β΄) Ποιά είναι η περίοδος T της συνάρτησης f; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ΄) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 6$.

(δ΄) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

$$\begin{aligned}
i) \quad & \sigma\upsilon\nu\,(a-\beta) &=& \quad \sigma\upsilon\nu a\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu a\cdot\eta\mu\beta \\
ii) \quad & \sigma\upsilon\nu\,(a+\beta) &=& \quad \sigma\upsilon\nu a\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu a\cdot\eta\mu\beta \\
iii) \quad & \eta\mu\,(a-\beta) &=& \quad \eta\mu a\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu a\cdot\eta\mu\beta \\
iv) \quad & \eta\mu\,(a+\beta) &=& \quad \eta\mu a\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu a\cdot\eta\mu\beta \\
v) \quad & \varepsilon\varphi\,(a+\beta) &=& \quad \frac{\varepsilon\varphi a+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi a\cdot\varepsilon\varphi\beta} \\
vi) \quad & \varepsilon\varphi\,(a-\beta) &=& \quad \frac{\varepsilon\varphi a-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi a\cdot\varepsilon\varphi\beta} \\
vii) \quad & \sigma\varphi\,(a+\beta) &=& \quad \frac{\sigma\varphi a\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi a} \\
viii) \quad & \sigma\varphi\,(a-\beta) &=& \quad \frac{\sigma\varphi a\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi a}
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $15°$.

97. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{12}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}$

ii) $\sigma\upsilon\nu 170°\cdot\sigma\upsilon\nu 50°+\eta\mu 170°\cdot\eta\mu 50°$

iii) $\eta\mu 140°\cdot\eta\mu 40°-\sigma\upsilon\nu 140°\cdot\sigma\upsilon\nu 40°$

iv) $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}+\eta\mu\frac{7\pi}{12}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{12}$

v) $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1+\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}$

98. Αν $\eta\mu\theta=\frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{3}{5}$ με $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τα:

$$\eta\mu\left(\theta-\varphi\right)\ \text{ και }\ \sigma\upsilon\nu\left(\theta+\varphi\right)$$

99. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

ii) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x$

iii) $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\eta\mu x$

iv) $\eta\mu\left(a+\beta\right)\cdot\eta\mu\left(a-\beta\right)=\eta\mu^2 a-\eta\mu^2\beta$

100. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

ii) $\dfrac{2\eta\mu\left(a+\beta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(a+\beta\right)+\sigma\upsilon\nu\left(a-\beta\right)}=\varepsilon\varphi a+\varepsilon\varphi\beta$

iii) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-4\eta\mu^2 x}$

iv) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega}$

101. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu\left(a-\beta\right)}{\eta\mu a\cdot\eta\mu\beta}=\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi a$

ii) $\dfrac{\eta\mu\left(a-\beta\right)}{\eta\mu a\cdot\eta\mu\beta}+\dfrac{\eta\mu\left(\beta-\gamma\right)}{\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma}+\dfrac{\eta\mu\left(\gamma-a\right)}{\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu a}=0$

102. Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(\eta\mu a+\sigma\upsilon\nu a\right)\left(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta\right)=\eta\mu\left(a+\beta\right)+\sigma\upsilon\nu\left(a-\beta\right)$

ii) $\eta\mu\left(\theta+18°\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(12°-\theta\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\theta+78°\right)\cdot\eta\mu\left(\theta-72°\right)=\frac{1}{2}$

iii) $\left(\eta\mu x-\eta\mu y\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y\right)^2=2+2\sigma\upsilon\nu\left(x+y\right)$

103. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(a+x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(a-x\right)}{\eta\mu\left(\beta+x\right)-\eta\mu\left(\beta-x\right)}$$

είναι ανεξάρτητη του x.

104. Αν $a+\beta=\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+\varepsilon\varphi a\right)\cdot\left(1+\varepsilon\varphi\beta\right)=2$$

105. Αν $a+\beta=135°$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+\sigma\varphi a\right)\cdot\left(1+\sigma\varphi\beta\right)=2$$

106. Να αποδείξετε ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο $AB\varGamma$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\varGamma=\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\varGamma$$

107. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:
$$\eta\mu\,(B+\Gamma) = 2\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$$
να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

108. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:
$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} = 2\sigma\upsilon\nu\Gamma$$
να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

109. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:
$$\frac{\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu\Gamma} = \varepsilon\varphi B$$
να αποδείξετε ότι: $\hat{A} = 90^\circ$ και αντίστροφα.

110. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

ii) $\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\sigma\upsilon\nu x}{2} = \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

iii) $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

iv) $2\eta\mu\,(x+45^\circ) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+1$

111. (α΄) Να αποδείξετε ότι:
$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\cdot\eta\mu x$$

(β΄) Να λύσετε στο διάστημα $(0,\pi)$ την εξίσωση:
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\cdot\eta\mu x = 0$$

3.7.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

$$
\begin{aligned}
i) \quad & \eta\mu 2a &&= 2\eta\mu a \cdot \sigma\upsilon\nu a \\
ii) \quad & \sigma\upsilon\nu 2a &&= \sigma\upsilon\nu^2 a - \eta\mu^2 a \\
& &&= 2\sigma\upsilon\nu^2 a - 1 \\
& &&= 1 - 2\eta\mu^2 a \\
iii) \quad & \varepsilon\varphi 2a &&= \frac{2\varepsilon\varphi a}{1 - \varepsilon\varphi^2 a} \\
iv) \quad & \sigma\varphi 2a &&= \frac{\sigma\varphi^2 a - 1}{2\sigma\varphi a}
\end{aligned}
$$

Οι παρακάτω τύποι είναι οι τύποι αποτετραγωνισμού:

$$
\begin{aligned}
i) \quad & \eta\mu^2 a &&= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2a}{2} \\
ii) \quad & \sigma\upsilon\nu^2 a &&= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2a}{2} \\
iii) \quad & \varepsilon\varphi^2 a &&= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2a}{1 + \sigma\upsilon\nu 2a} \\
iv) \quad & \sigma\varphi^2 a &&= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2a}{1 - \sigma\upsilon\nu 2a}
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

112. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\frac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$

ii) $1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}$

iii) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{12}-1$

iv) $\frac{2\varepsilon\varphi 75^\circ}{1-\varepsilon\varphi^2 75^\circ}$

113. Αν $\sigma\upsilon\nu a=-\frac{4}{5}$ και $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $2a$.

114. Αν $\eta\mu\theta=\frac{1}{3}$ και $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2θ.

115. Αν $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$ και $25\eta\mu^2\omega+5\eta\mu\omega-12=0$, να υπολογίσετε τα $\eta\mu 2\omega$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega$.

116. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x=\sigma\upsilon\nu 2x$

ii) $\eta\mu^3x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^3x\cdot\eta\mu x=\frac{\eta\mu 2x}{2}$

iii) $\frac{\eta\mu 2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}=\varepsilon\varphi\theta$

iv) $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega+\eta\mu 2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega+\eta\mu 2\omega}=\varepsilon\varphi\omega$

117. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 3a=3\eta\mu a-4\eta\mu^3a$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3a=4\sigma\upsilon\nu^3a-3\sigma\upsilon\nu a$

iii) $\eta\mu 2a=\frac{2\varepsilon\varphi a}{1+\varepsilon\varphi^2a}$

iv) $\sigma\upsilon\nu 2a=\frac{1-\varepsilon\varphi^2a}{1+\varepsilon\varphi^2a}$

118. Να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x+2\sigma\varphi 2x=0$

ii) $\frac{\eta\mu^2\theta+1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)}=2\varepsilon\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right)$

iii) $\frac{2\eta\mu 2\omega-\eta\mu 4\omega}{2\eta\mu 2\omega+\eta\mu 4\omega}=\varepsilon\varphi^2\omega$

iv) $\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=2\varepsilon\varphi 2x$

119. Αφού υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{8}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{3}{4}$

iii) $\eta\mu^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\eta\mu^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{3}{4}$

120. (α΄) Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}$$

(β΄) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

121. (α΄) Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

(β΄) Να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

122. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 2x=1$

ii) $\eta\mu 2x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0$

iii) $\varepsilon\varphi 2x=2\sigma\upsilon\nu x$

iv) $2\eta\mu^2x+\eta\mu^2 2x=2$

123. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu B} = \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A}$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

124. Αν σε ένα μη αμβλυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$2\eta\mu B \cdot \eta\mu\frac{A}{2} = \eta\mu A$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Κεφάλαιο 4

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός: Ονομάζουμε *πολυώνυμο* της μεταβλητής x κάθε παράσταση της μορφής:

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

όπου n φυσικός αριθμός και $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ πραγματικοί αριθμοί.

- Οι πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ονομάζονται *συντελεστές* του πολυωνύμου. Ειδικά ο αριθμός a_0 λέγεται *σταθερός όρος* του πολυωνύμου.
  Το πολυώνυμο:
  $$P\left(x\right) = a_0$$
  λέγεται *σταθερό πολυώνυμο*.
  Το πολυώνυμο:
  $$P\left(x\right) = 0$$
  λέγεται *μηδενικό πολυώνυμο*.
- Στο πολυώνυμο:
  $$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$
  ο αριθμός n ονομάζεται *βαθμός* του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια βαθμός ενός πολυωνύμου είναι η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο.
  Τα σταθερά πολυώνυμα εκτός από το μηδενικό πολυώνυμο έχουν βαθμό ίσο με 0.
  Δεν ορίζεται βαθμός για το μηδενικό πολυώνυμο.
- Αν στο πολυώνυμο:
  $$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
  αντικαταστήσουμε στην θέση του x τον πραγματικό αριθμό ρ, θα προκύψει ο αριθμός:
  $$P\left(\rho\right) = a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + a_1 \rho + a_0$$
  ο οποίος ονομάζεται *αριθμητική τιμή* του πολυωνύμου $P\left(x\right)$ για $x = \rho$.
  Στην περίπτωση που ισχύει $P\left(\rho\right) = 0$, ο πραγματικός αριθμός ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου $P\left(x\right)$.
- Δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν έχουν τον ίδιο βαθμό και όλοι οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων των μεταβλητών τους είναι ίσοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

125. Ποιές από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x; Για όσα είναι, να βρείτε και τον βαθμό τους.
   i) $2x^2 - x + 1$ ii) $x^3 - \frac{1}{x}$ iii) $-x^4$
   iv) $2x^5 - 7x^3 + 5x - \sqrt{2}$ v) $4x^{10} + 8x^7 - x^{-2} - 5$ vi) $x^{20} - 5x^{\frac{1}{3}} + 9$

126. Δίνονται τα πολυώνυμα:
$$P(x) = 2x^2 + 1$$
$$Q(x) = -4x^4 - 4x^2 - 1$$
$$F(x) = -2x^2 + 5$$
   Να βρείτε τα πολυώνυμα:
$$P(x) + F(x)\ ,\ P(x) \cdot Q(x)\ ,\ P^2(x) + Q(x)\ ,\ F(P(x))$$

127. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = \left(9\lambda^3 - 4\lambda\right)x^3 + \left(9\lambda^2 - 4\right)x - 3\lambda + 2$$
   Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

128. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = \left(\lambda^3 - 3\lambda\right)x^3 + \left(\lambda^2 - 3\lambda\right)x^2 + \left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right)x + 3\lambda - 5$$
   Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

129. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P(x) = -x^4 + 3x^2 - 1$$
   Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$, για $x = -1$ και για $x = 0$.

130. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 2$$
   Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 1,2 και $\frac{1}{2}$ είναι ρίζες του πολυωνύμου.

131. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = x^3 - \kappa x^2 + 5x + \kappa$$
   Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ για την οποία ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

132. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = 3x^3 + ax^2 + \beta x - 6$$
   Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 3.

133. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \kappa x + 6$$
   Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών λ και κ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα τον αριθμό 1 και επιπλέον να ισχύει $P(-2) = -12$.

134. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = x^2 + x - 3$$
   Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο ισχύει: $P(1 - \kappa) = 3$.

135. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν:
$$P(2) = 4a + 2\beta + 18 \text{ και } P(-2) = 4a - 2\beta + 2$$
   Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε το πολυώνυμο $Q(x) = P(x+1) + 2ax + \beta$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1 και το πολυώνυμο $R(x) = P(x-1) - 2ax + \beta$ να έχει ρίζα τον αριθμό -1.

136. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ και } Q(x) = P(P(P(x)))$$

Αν το $P(x)$ έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς ρ και a_0, να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα και του πολυωνύμου $Q(x)$.

137. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

(α΄) Να υπολογίσετε τον αριθμό $P(1)$ και να παρατηρήσετε τι εκφράζει.

(β΄) Να υπολογίσετε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου:

$$P(x) = (3 - 2x)^{2012} + (x - 2)^{2011}$$

(γ΄) Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν άθροισμα συντελεστών ίσο με 1, τότε ποιό είναι το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x) \cdot Q(x)$;

138. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$P(x) = \left(a^2 - 3a\right) x^3 + x^2 + a \text{ και } Q(x) = -2x^3 + a^2 x^2 + \left(a^3 - 1\right) x + 1$$

139. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, β, γ για τις οποίες είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 3x^2 - 7x + 5 \text{ και } Q(x) = ax(x+1) + \beta x + \gamma$$

140. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$P(x) = \lambda x^2 - x + \lambda^2 - 5 \text{ και } Q(x) = x^2 + \lambda^2 x - 4\lambda$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το άθροισμα των δύο πολυωνύμων να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

141. (α΄) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a και b ώστε για κάθε $x \neq \pm\frac{1}{2}$ να ισχύει:

$$\frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x-1}$$

(β΄) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{4033 \cdot 4035}$$

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Το Θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης

Έστω δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$, όπου το $\delta(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

με το $\upsilon(x)$ να είναι ή το μηδενικό πολυώνυμο ή ο βαθμός του να είναι μικρότερος από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Θεώρημα 2

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$, όπου ρ πραγματικός αριθμός είναι ίσο με $\upsilon = P(\rho)$.

Θεώρημα 3

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-\rho$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Θεώρημα 4

Έστω το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

όπου όλοι οι συντελεστές του $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ είναι ακέραιοι αριθμοί και $a_n \neq 0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον ακέραιο ρ, τότε ο αριθμός ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0.

Θεώρημα 5

Έστω το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

όπου όλοι οι συντελεστές του $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ είναι ακέραιοι αριθμοί και $a_n \neq 0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον ρητό $\frac{m_1}{m_2}$, τότε ο αριθμός m_1 είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 και ο αριθμός m_2 είναι διαιρέτης του a_n.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

142. Να κάνετε τις ακόλουθες διαιρέσεις πολυωνύμων και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης:
    i) $\left(x^3-2x^2+x-5\right):\left(x^2+x+1\right)$
    ii) $\left(2x^5-x^2+4\right):\left(x^3-1\right)$
    iii) $\left(2x^4-5x^3+4x^2-2x+3\right):\left(x^2+1\right)$
    iv) $\left(x^4+\left(3-\kappa^2\right)x^2-2\kappa^2\right):\left(x^2-\kappa^2\right)$
143. Με την βοήθεια του σχήματος Horner να κάνετε τις ακόλουθες διαιρέσεις πολυωνύμων και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης:
    i) $\left(-x^3+75x-250\right):(x+10)$
    ii) $\left(x^4+x^2+1\right):(x+2)$
    iii) $\left(x^4+x^2+x+8\right):(x+1)$
    iv) $\left(2x^3-(1+2\kappa)x^2+(1+\kappa)x-1\right):(x-\kappa)$
144. Να βρείτε τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων:
    i) $\left(x^4-x^3+x^2-x+3\right):(x-2)$
    ii) $\left(x^{2014}-x^{2011}+x^2-x+3\right):(x-1)$
    iii) $\left(3x^{1000}+5x^{500}-x-2\right):(x+1)$
    iv) $\left(x^{2016}-x^{2015}+x^2-3\right):(x+1)$
145. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε το πολυώνυμο $x-1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου:
    $$P(x)=\kappa^2x^4+3\kappa x^2-4$$
146. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε το πολυώνυμο $x-2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου:
    $$P(x)=x^4+(\kappa-2)x^3+2\kappa x^2-x+2\kappa$$
147. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ ώστε το πολυώνυμο $x-1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου:
    $$P(x)=\left(\kappa^2-\lambda^2\right)x^{2012}+2\left(\lambda^2-\lambda-\kappa\right)x+2$$
148. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου:
    $$P(x)=\lambda^2x^3-\lambda x^2+(1+\lambda)x+5$$
    με το πολυώνυμο $x+2$ να είναι ίσο με -11.
149. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου:
    $$P(x)=x^3-2\kappa x^2+\kappa x-\kappa^2$$
    με το πολυώνυμο $x-\kappa$ να είναι ίσο με -1.
150. Θεωρούμε το πολυώνυμο:
    $$P(x)=x^{2000}+ax^{1999}+ax^{1998}+\ldots+ax+a$$
    Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι ίσο με 2001.
151. Δίνεται το πολυώνυμο:
    $$P(x)=x^3+\kappa x^2-5x+\lambda$$
    Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x+3$.
152. Δίνεται το πολυώνυμο:
    $$P(x)=x^3-ax^2+\beta x+a-2$$
    Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντες τα πολυώνυμα x και $x+1$.
153. Δίνεται το πολυώνυμο:
    $$P(x)=\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x^3+\left(\lambda^2-2\lambda\right)x^2-2+\lambda$$
    Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$:

    (α΄) είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

(β΄) έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(γ΄) διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x+1$ αφήνει υπόλοιπο -12.

154. Αφού κάνετε την διαίρεση του πολυωνύμου $P\left(x\right)=x^4+3x^2+2$ με το πολυώνυμο $Q\left(x\right)=x^2+\kappa$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε το $Q\left(x\right)$ να είναι παράγοντας του $P\left(x\right)$.

155. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^3+x^2+\kappa x+2$$
Αν το $P\left(x\right)$ έχει ρίζα το -2, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ. Στην συνέχεια να κάνετε την διαίρεση $P\left(x\right):\left(x+1\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

156. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^4-\left(a+1\right)x^3+3x-4$$
Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P\left(x\right)$ με το πολυώνυμο $x+2$ είναι ίσο με -6, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a. Στην συνέχεια να κάνετε την διαίρεση $P\left(x\right):\left(x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

157. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=2x^4-6x^3+5x^2-3x+2$$
διαιρείται από το πολυώνυμο $\left(x-1\right)\left(x-2\right)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

158. Θεωρούμε πολυώνυμο $P\left(x\right)$ για το οποίο ισχύει $P\left(-1\right)=P\left(2\right)=1$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P\left(x\right)-1$ διαιρείται από το πολυώνυμο $\left(x+1\right)\left(x-2\right)$.

159. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=2x^3-3x^2+ax+\beta$$
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε το πολυώνυμο $P\left(x\right)$ να διαιρείται από το πολυώνυμο x^2-x-2.

160. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^4-5x^3+6x^2-x-1$$
διαιρείται από το πολυώνυμο $\left(x-1\right)^2$.

161. Έστω n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 και το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^{n+1}-\left(n+1\right)x+n$$
Να αποδείξετε ότι το $P\left(x\right)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $\left(x-1\right)^2$.

162. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=ax^4-\left(\beta^2+1\right)x^3-\beta x+7\ \ ,\ \ a,\beta\in\mathbb{R}$$
δεν μπορεί να έχει παράγοντα το πολυώνυμο x^2-1.

163. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^5-2ax^3+\beta x^2+3\gamma-6$$
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a,β,γ ώστε το $P\left(x\right)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο x^3-x.

164. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^3-x^2-\left(3+a\right)x+\beta+10$$
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a,β ώστε το $P\left(x\right)$ να διαιρείται από το πολυώνυμο $\left(x-2\right)^2$.

165. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P\left(x\right)=x^3+ax+\frac{\beta}{2}$$
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a,β ώστε το $P\left(x\right)$ να διαιρείται από το πολυώνυμο $\left(x-1\right)^2$.

166. Έστω n θετικός ακέραιος και το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^{n+1} - x^n + \beta x + a$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε το $P(x)$ να διαιρείται από το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

167. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + (a+\beta)x^3 + ax^2 - 3x + 2$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη δύναμη του πολυωνύμου $x-1$.

168. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $ax+\beta$, όπου $a \neq 0$, είναι $\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{a}\right)$.

169. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = \lambda x^2 + 3(\lambda - 1)x + 3 \text{ και } Q(x) = x^3 - 2\lambda x + 1$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε οι διαιρέσεις $P(x) : 2x-1$ και $Q(x) : x+1$ να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

170. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + \beta x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2 - 3x + 2$ να δίνει υπόλοιπο $3x+1$.

171. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$\left(ax^4 + \beta x^3 + 8x^2 - 16x + 8\right) : \left(x^2 - 4x + 3\right)$$

να είναι το πολυώνυμο $4x - 7$.

172. Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα πολυώνυμα $x-1$ και $x-2$ είναι 3 και -2 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \left(x^2 - 3x + 2\right)$.

173. Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα πολυώνυμα $x-2$ και $x-3$ είναι 10 και 15 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \left(x^2 - 5x + 6\right)$.

174. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$ με $P(0) = 2$, $P(1) = 1$ και $P(-2) = 10$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \left(x^3 + x^2 - 2x\right)$.

175. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma \ \ , \ \ a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Αν το πολυώνυμο $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + 2\beta x + 3\gamma = 0$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

176. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^3-3x^2+x-3=0$

ii) $x^3+x^2-25x-25=0$

iii) $x^7+x^4-x^3-1=0$

iv) $5x^4-26x^3+26x-5=0$

v) $2\eta\mu^3 x+3\sigma\upsilon\nu^2 x-3\eta\mu x-1=0$

177. Να λύσετε τις εξισώσεις και τις ανισώσεις:

i) $x^3-2x^2-5x+6=0$

ii) $x^3-8x+7=0$

iii) $6x^3-11x^2-3x+2=0$

iv) $2x^3-11x^2+17x-6=0$

v) $2x^4+3x^3-13x^2-7x+6<0$

vi) $3x^3+10x^2+2x-3\geq 0$

178. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\dfrac{2x-1}{x-3}+\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}$

ii) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{10}{9}-\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

iii) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{19x}{12}$

iv) $\dfrac{x^2-2}{x}=\dfrac{x}{x^2+2}$

v) $\dfrac{x^2+2x-4}{x-2}=x^2$

vi) $\dfrac{1+x^3}{1-x}+\dfrac{1-x^3}{1+x}=1$

179. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}>\dfrac{x^2-3x+2}{x}$

ii) $x^2+\dfrac{3x^2}{x-1}>\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2-x^2}{x^2-x}$

iii) $x^2+\dfrac{3x^2-x-1}{x-1}-\dfrac{x^2-2}{x-x^2}>0$

iv) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{4}{x-1}\geq\dfrac{2}{x^2-1}$

180. Να λύσετε τις εξισώσεις και τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{x^2-9}=x-1$

ii) $\sqrt{x+32}=16-\sqrt{x}$

iii) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}=\sqrt{19}$

iv) $\sqrt{x-1}-1=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

v) $\sqrt{1-2x}>\sqrt{1+4x}$

vi) $\sqrt{3x+7}>\sqrt{x-1}$

181. Να λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$ την εξίσωση:

$$\eta\mu^3 x-2\eta\mu^2 x-\eta\mu x+2=0$$

182. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x)=x^3-2x^2+x-2$$

(α΄) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=0$.

(β΄) Αν το πολυώνυμο $Q(x)=x-2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-3\sigma\upsilon\nu\vartheta$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να βρείτε το ϑ.

183. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{2x^2-2x-4}{2x^3-3x^2-3x+2}$$

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β΄) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

(γ΄) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$.

184. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^4 - 2x^3 - ax^2 + \beta x + 2$$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x + 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ίσο με 28, τότε:

(α΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β.

(β΄) Για τις τιμές των a και β που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$.

185. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - (a + \beta)x^2 + (3a - 1)x - 2$$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντες τα $x - 1$ και $x - 2$, τότε:

(α΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β.

(β΄) Για τις τιμές των a και β που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$.

(γ΄) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$.

186. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 - 4x - 8$$

Αν το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 2$ δίνει πηλίκο $\pi(x)$ και υπόλοιπο $\upsilon = 4$, τότε:

(α΄) Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

(β΄) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ.

(γ΄) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$.

(δ΄) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) > 4$.

187. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + ax + \beta$$

Αν το $P(x)$ διαιρείται από το $x^2 + x + 1$, τότε:

(α΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β.

(β΄) Για τα a και β που βρήκατε, να λύσετε τις εξισώσεις: $P(x) = 0$ και $P(2\sigma\upsilon\nu x + 2) = 0$.

188. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις σε cm, x, $x - 2$ και $2x - 2$, όπου x ακέραιος. Να προσδιορίσετε την τιμή του x ώστε ο όγκος V του δοχείου να είναι μεγαλύτερος από $12cm^3$ και μικρότερος από $120cm^3$.

Κεφάλαιο 5

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

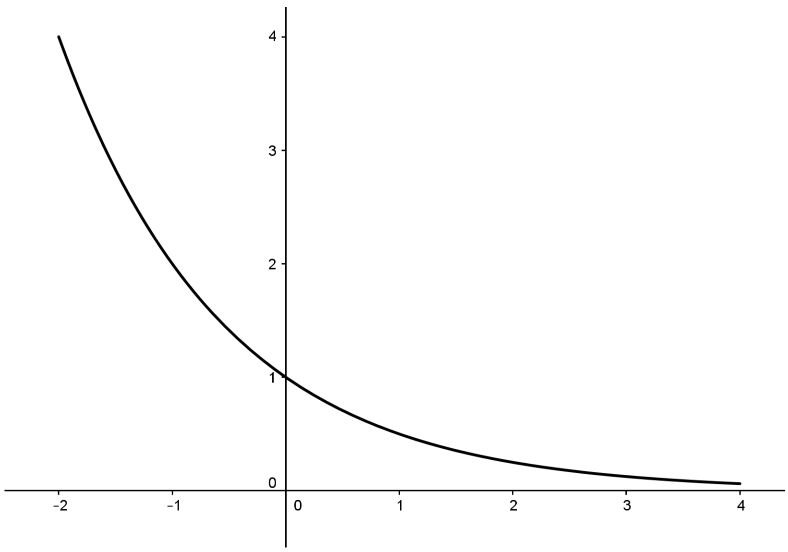
5.1 Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω ένας θετικός πραγματικός αριθμός a διαφορετικός του 1. Η συνάρτηση:

$$f(x) = a^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ονομάζεται *εκθετική συνάρτηση* με βάση τον πραγματικό αριθμό a.

5.1.1 Η εκθετική συνάρτηση με $0 < a < 1$



- Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το σύνολο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^x > 0$$

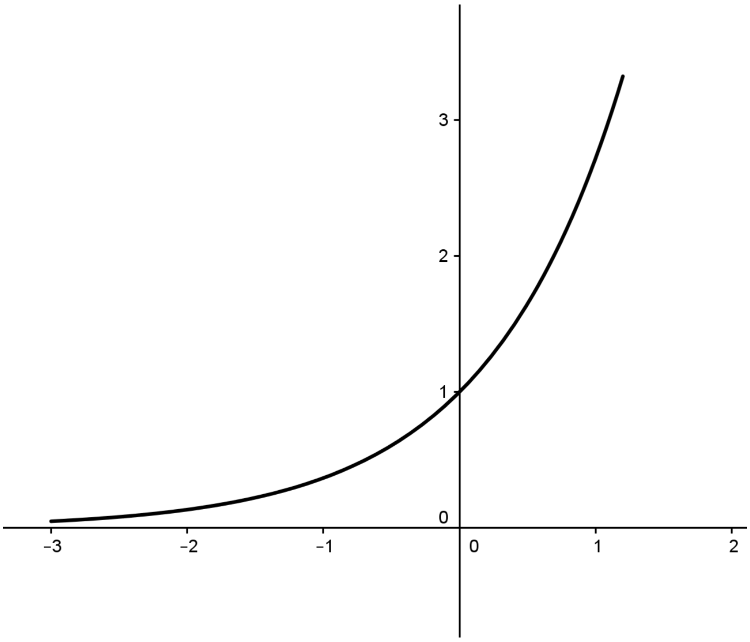
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Ox.
- Η συνάρτηση είναι ένα προς ένα στο σύνολο $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

5.1.2 Η εκθετική συνάρτηση με $a > 1$



- Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το σύνολο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^x > 0$$

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Ox'.
- Η συνάρτηση είναι ένα προς ένα στο σύνολο $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Ο αριθμός του Euler: Ο αριθμός του Euler είναι ένας άρρητος αριθμός που συμβολίζεται με e και ορίζεται ως εξής:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Η τιμή του είναι περίπου: 2.718...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

189. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = (2+a)^x \ , \ a > -2$$
(α΄) Για ποιά τιμή του a η συνάρτηση f είναι σταθερή;
(β΄) Για ποιές τιμές του a η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για ποιές τιμές είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$;

190. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \left(4-a^2\right)^x$$
(α΄) Για ποιές τιμές του a ορίζεται η συνάρτηση f;
(β΄) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
(γ΄) Να βρείτε το a ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.
(δ΄) Να βρείτε το a ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $B(2,1)$.

191. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$
ii) $27^{4x} = 9^{x+1}$
iii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$
iv) $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$

192. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 56$
ii) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$
iii) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$
iv) $5 \cdot 5^{x+1} = 9 \cdot 3^x$
v) $18^{8-4x} = \left(54\sqrt{2}\right)^{3x-2}$
vi) $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$

193. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$
ii) $4^x - 2^x - 12 = 0$
iii) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$
iv) $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$
v) $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$
vi) $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$

194. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$
ii) $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$
iii) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$
iv) $3^{x+1} + 9^{x-2} = 28$
v) $2^{\eta\mu^2 x} + 2^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$
vi) $3^{\frac{2}{x}} - 4 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$

195. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $9^x + 6^x = 4^x$
ii) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$
iii) $2^{3x+1} + 12 = 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x+2}$
iv) $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$
v) $6^x - 2^{x+2} = 3 \cdot 2^x - 6^{x+1}$
vi) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}$

196. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $\left(x^2 - 5x + 5\right)^{x+2} = 1$
ii) $\left(x^2 - x - 1\right)^{3x-2} = 1$
iii) $x^x = x$

197. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $3^{x^2-7x+6} < 1$
ii) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x}$
iii) $3^{|3x-4|} > 9$
iv) $4^x + 2^{x+1} - 3 < 0$

198. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $e^{2x} - e\left(e^x - 1\right) - e^x < 0$

ii) $\dfrac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$

iii) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

iv) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \geq 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

v) $\dfrac{2e^x - 3}{e^x - 1} > 2$

vi) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > \dfrac{1}{2}$

199. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{rcl} 3^{2x} - 2^y & = & 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} & = & 7 \end{array}\right.$

ii) $\left\{\begin{array}{rcl} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y & = & \dfrac{11}{4} \\ 2^x - 3^y & = & -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

iii) $\left\{\begin{array}{rcl} 2^{x-2y} & = & 8 \\ 3^{\frac{x}{2}+y} & = & 3\sqrt{3} \end{array}\right.$

iv) $\left\{\begin{array}{rcl} 9^{2x+1} & = & 81 \cdot 27^{2y-1} \\ 25 \cdot 5^{x+y} & = & 5^{3x+2} \end{array}\right.$

200. Να βρείτε τον ακέραιο αριθμό k ώστε η εξίσωση:

$$k \cdot 3^{1-x} + 3^x - 4 = 0$$

να έχει δύο πραγματικές και μη αρνητικές ρίζες.

201. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = e^x\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Αν οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ και $f\left(x_3\right)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

202. Έστω $a > 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = a^x + x\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

(β΄) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση: $a^{x^2+2} - a^{3x} < -x^2 + 3x - 2$

203. Σε έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta\left(t\right)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται σε βαθμούς Κελσίου από την συνάρτηση:

$$\Theta\left(t\right) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t\ ,\ t \geq 0$$

(α΄) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής την στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

(β΄) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των $36,5°C$.

(γ΄) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες, πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου;

204. Σε μία πόλη 10 χιλιάδων κατοίκων εμφανίζεται μία μεταδοτική γρίπη. Το πλήθος των κατοίκων (σε χιλιάδες) που προσβάλλονται από την γρίπη, t μήνες μετά την έναρξη της ασθένειας, δίνεται από την συνάρτηση:

$$N\left(t\right) = 10\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κατοίκων που προσβάλλονται από την γρίπη συνεχώς αυξάνεται.

(β΄) Σε πόσους μήνες το πλήθος των αρρώστων ισούται με το 20% του αρχικού πληθυσμού της πόλης;

205. Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

- 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400.
- 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3200.

Αν ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων είναι:

$$P\left(t\right) = P_0 \cdot 2^{kt}$$

όπου $P\left(t\right)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t ωρών μετά την έναρξη της παρατήρησης, P_0 ο αρχικός αριθμός βακτηριδίων και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων, τότε:

(α΄) Να υπολογίσετε την σταθερά k.

(β΄) Να υπολογίσετε τον αρχικό αριθμό βακτηριδίων.

(γ΄) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός βακτηριδίων διπλασιάζεται;

5.2 Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω ένας πραγματικός αριθμός $0 < a \neq 1$ και ένας θετικός πραγματικός αριθμός θ. Ονομάζουμε λογάριθμο του θ με βάση τον a και συμβολίζουμε $log_a\theta$, τον πραγματικό αριθμό στον οποίον πρέπει να υψώσουμε τον a ώστε να πάρουμε τον θ. Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = log_a\theta$$

Με βάση τον ορισμό του λογαρίθμου ισχύουν τα παρακάτω:

- $log_a a = 1$
- $log_a 1 = 0$
- $log_a a^\theta = \theta$
- $a^{log_a\theta} = \theta$

Ιδιότητες λογαρίθμων: Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta, \theta_1, \theta_2$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $k \in \mathbb{R}$, τότε:

$$log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = log_a\theta_1 + log_a\theta_2$$

$$log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = log_a\theta_1 - log_a\theta_2$$

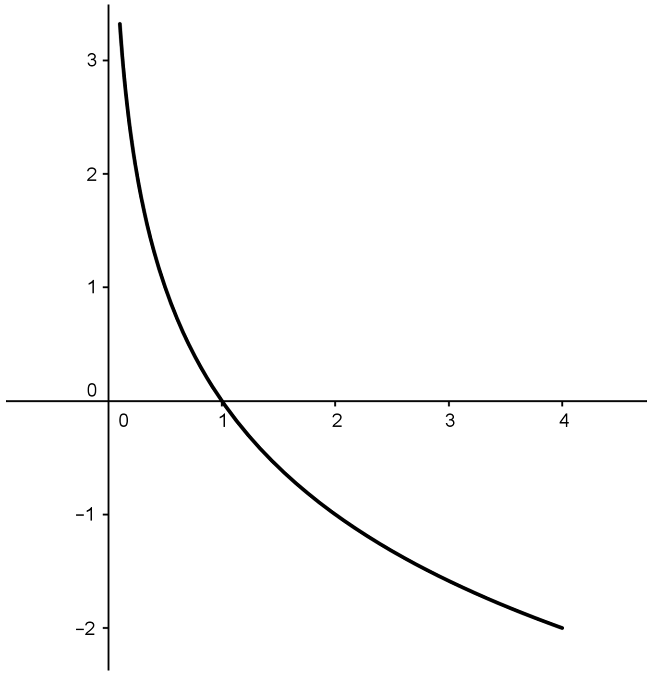
$$log_a\theta^k = k \cdot log_a\theta$$

Τύπος αλλαγής βάσης λογαρίθμου: Αν $a, \beta > 0$ με $a, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$log_\beta\theta = \frac{log_a\theta}{log_a\beta}$$

Φυσικός λογάριθμος: Ο λογάριθμος με βάση τον αριθμό e ονομάζεται φυσικός ή νεπέρειος λογάριθμος και συμβολίζεται lnx.

5.2.1 Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση $0 < a < 1$



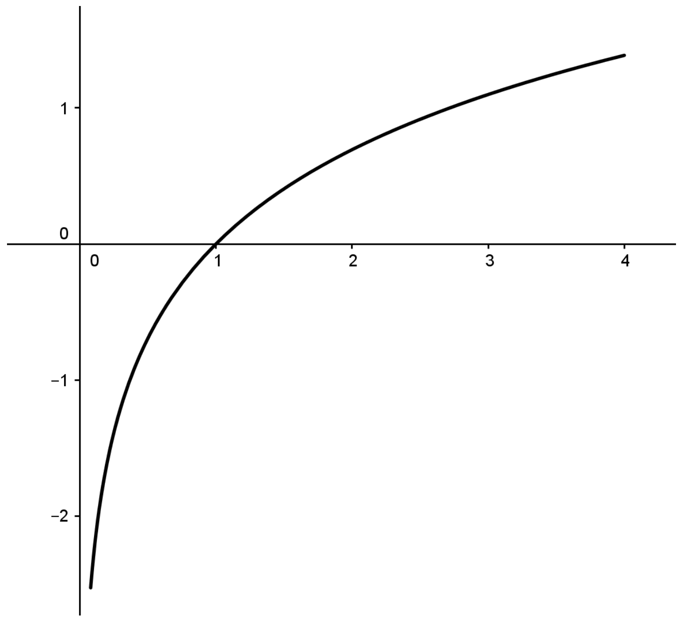
- Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Oy.
- Η συνάρτηση είναι ένα προς ένα στο σύνολο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$log_a x_1 = log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$log_a x_1 < log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

5.2.2 Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση $a > 1$



- Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy'.
- Η συνάρτηση είναι ένα προς ένα στο σύνολο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$log_a x_1 = log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$log_a x_1 < log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

206. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

i) $log0,001$ ii) $log_5\sqrt{125}$ iii) $log_{\frac{1}{2}}\sqrt{8}$ iv) $log_{\sqrt{3}}27$

v) lne^2 vi) $log_\pi\sqrt{\pi}$ vii) $log_4 0,25$ viii) $log_{\sqrt{2}}8$

207. Να υπολογίσετε τον x από τις παρακάτω ισότητες:

i) $log_x 36 = 2$ ii) $log_8 x = -\frac{5}{3}$ iii) $log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3} = x$ iv) $log_{\frac{1}{9}}\frac{27}{28} = x$

v) $log_x 25 = 2$ vi) $log_x 16 = \frac{2}{3}$ vii) $log_{\frac{1}{2}}x = -2$ viii) $log_{\sqrt{7}}x = 4$

208. Να αποδείξετε ότι:

i) $log_2 20 + log_2 4 - log_2 10 = 3$ ii) $2log_3 3 + log_2 4 - log_3 9 = 2$

iii) $2log2 + log70 - log4 - log7 = 1$ iv) $6log_3 2 - 2log_3 32 + 4log_3 6 = 4$

v) $log25 + 3log2 - log20 = 1$ vi) $\frac{1}{2}log_5 9 + \frac{1}{3}log_5 125 - \frac{1}{4}log_5 81 = 1$

209. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\left(log\sqrt{125} + log\sqrt{27} - log\sqrt{8}\right) = 3\left(log15 - log2\right)$

ii) $log\frac{11}{3} - 2log\sqrt{\frac{7}{44}} + log\frac{21}{121} = 2log2$

210. Να αποδείξετε ότι:

i) $4^{log_2 4 - 1} = 4$ ii) $7^{\frac{1}{3}log_7 27} = 3$

iii) $16^{\frac{1}{2}log_4\sqrt{2} + \frac{1}{2}log4\sqrt{8}} = 4$ iv) $5^{2log_5 10 - 3} = \frac{4}{5}$

211. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\dfrac{log10 - log5}{\frac{1}{2}log4}$ ii) $3log2 + log125$

iii) $2log_3 6 - log_3 24 + \frac{1}{2}log_3 4$ iv) $(log5)^3 + (log20)^3 + log8 \cdot log0.25$

v) $\dfrac{log_3 81 - log864}{log_{0,5}64 + log2\frac{1}{32} - log24\sqrt{2}}$ vi) $\dfrac{ln\sqrt[3]{9} + ln\sqrt[3]{4} - ln\sqrt[3]{25}}{ln6 - ln5}$

212. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $ln\frac{1}{e} - ln\sqrt{e} - ln\left(lne\right) - ln2^{log_2 e} - ln\left(log_2\left(log_2 4\right)\right)$

ii) $log_2\left(2+\sqrt{2}\right) + log_2\left(2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + log_2\left(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

213. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \quad log_a\beta^x \cdot log_\beta a^y = xy$$

$$ii) \quad log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdots log_7 8 = 3$$

214. Αν $log_{30}3 = a$ και $log_{30}5 = \beta$, να υπολογίσετε τον αριθμό $log_{30}8$.

215. Αν $log2 = a$ και $log3 = \beta$, να υπολογίσετε τον αριθμό $log\frac{64}{15}$.

216. Αν $log\left(x^2y^3\right) = a$ και $logx - logy = \beta$, να υπολογίσετε τους $logx$ και $logy$ συναρτήσει των αριθμών a και β.

217. Αν $log2 \cdot log5 = \theta$, να εκφράσετε τους αριθμούς $log2$ και $log5$ ως συνάρτηση του θ. Επιπλέον δείξτε ότι $\theta < \frac{1}{4}$.

218. Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu a = \frac{1}{10}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$T = log\left(\varepsilon\varphi a\right) + log\left(\sigma\upsilon\nu a\right).$$

219. Να αποδείξετε ότι:

$$log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -logn$$

220. Αν $a > 0$, $b > 0$ και $a^2 + b^2 = 7ab$, να δείξετε ότι:

$$lna + lnb = 2ln\left(\frac{a+b}{3}\right)$$

221. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $a = ln2$, $\beta = ln\left(2^x - 1\right)$ και $\gamma = ln\left(\frac{2^x + 5}{2}\right)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

222. Αν οι θετικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι οι αριθμοί $loga, log\beta, log\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

223. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $log\left(x+1\right) + log\left(x-1\right) = log2$

ii) $log\left(x^2+1\right) - logx = log2$

iii) $log\left(x^2 - 27\right) - log\left(x-5\right) = 2log3$

iv) $log\left(x-2\right) + log\left(x-1\right) = log\left(2x+8\right)$

224. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $log^2x - 3logx = log\left(x^2\right) - 4$

ii) $ln^4x - 5ln^2x + 4 = 0$

iii) $\frac{3logx + 19}{3logx - 1} = 2logx + 1$

iv) $\frac{logx + 1}{logx} + \frac{logx}{logx + 1} = \frac{13}{6}$

225. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $log\left(4x-1\right) = 2log2 + log\left(x^2 - 1\right)$

ii) $log_2\left(3^{2x-2} + 7\right) = 2 + log_2\left(3^{x-1} + 1\right)$

iii) $x + log\left(1 + 2^x\right) = x \cdot log5 + log6$

iv) $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

226. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $ln\left(x^2 - 4\right) < ln3x$

ii) $log\left(x^2\right) > \left(logx\right)^2$

iii) $log^2x \geq logx + 2$

iv) $\frac{1}{1 + logx} + \frac{1}{1 - logx} > 2$

227. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \leq 0$

ii) $ln^2x - ln\frac{1}{x} - 2 > 0$

iii) $ln\left(ln\left(x+3\right)\right) > 0$

iv) $5 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^{x+1} - 5^x + 2 > 0$

228. (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $3^{logx} = x^{log3}$

(β΄) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{logx} = 54 - x^{log3}$

229. Να υπολογίσετε τον x αν ισχύει:

$$2\left(log_x 2\right)^2 + log_x 4 = -1 + log_x 32$$

230. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{x+1} + 3^x + 3^{x-2} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

231. Αν οι αριθμοί 7, $ln\left(\sqrt{3\cdot 4^x+2\cdot 25^x}\right)$, $x\cdot ln10$ είναι με την σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x.

232. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x+1)^{log(x+1)}=100\,(x+1)$$

233. Έστω n θετικός ακέραιος. Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό x για τον οποίον ισχύει:

$$logx+logx^3+logx^5+\cdots+logx^{2n-1}=2n^2$$

234. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left\{\begin{array}{rcl} lnx-lny & = & 2\\ x+2y & = & 10\end{array}\right.$ ii) $\left\{\begin{array}{rcl} logx+logy & = & 1\\ x-y & = & -3\end{array}\right.$

iii) $\left\{\begin{array}{rcl} log_2x+log_2y & = & 1\\ x^2+y^2 & = & 5\end{array}\right.$ iv) $\left\{\begin{array}{rcl} log^2x+log^2y & = & 5\\ logx-logy & = & 3\end{array}\right.$

235. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=log\left(100-x^2\right)$$

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
(β΄) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.
(γ΄) Να λύσετε την ανίσωση: $10^{f(x)}<19$

236. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=ln\left(\frac{e^x-3}{e^x-1}+1\right)$$

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
(β΄) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
(γ΄) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)<0$

237. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=log\left(2^x-1\right)$$

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
(β΄) Να λύσετε την ανίσωση: $log\left(2^x+26\right)>1+f(x)$
(γ΄) Να λύσετε την εξίσωση: $2f(x)=log2+log\left(2^x+3\right)$

238. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$$

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
(β΄) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=2ln2$
(γ΄) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>0$

239. Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε ευρώ), t χρόνια μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300, ενώ μετά από έξι μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$lnQ(t)=at+\beta\ ,\ t\geq 0$$

όπου $a,\beta\in\mathbb{R}$, τότε:

(α΄) Να αποδείξετε ότι: $Q(t)=3\cdot 4^{-t}$, $t\geq 0$
(β΄) Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής.
(γ΄) Να υπολογίσετε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής.

240. Ο θόρυβος y ενός ήχου σε ντεσιμπέλ (dB) δίνεται από τον τύπο:

$$y = 20log\left(\frac{x}{20}\right)$$

όπου x η πίεση που ασκεί το ακουστικό κύμα στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα μετρημένη σε μP ($1\mu P = 10^{-6}P$).

(α΄) Πόση πίεση ασκεί ένα αθόρυβο κύμα στα μόρια του αέρα;
Σημείωση:*Μία ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβός της είναι 20dB που είναι ο θόρυβος του θροΐσματος των φύλλων ενός δέντρου σε ελαφρύ φύσημα του αέρα.*

(β΄) Ένας κεραυνός άσκησε πίεση $x = 2 \cdot 10^{6,5}\mu P$ στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα. Πόσα ντεσιμπέλ ήταν ο θόρυβος που προξένησε;

241. Έστω ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού είναι η:

$$N\left(t\right) = N_0 \cdot e^{-ct}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες και το $N\left(t\right)$ σε γραμμάρια.
Μετά από 4 ημέρες το ραδιενεργό υλικό που έχει μείνει αδιάσπαστο είναι 5 γραμμάρια και μετά από 6 ημέρες από την αρχή της διάσπασης έχουν μείνει $2,5$ γραμμάρια του υλικού.

(α΄) Να βρείτε τους αριθμούς N_0 και c.

(β΄) Να υπολογίσετε την ημιζωή του ραδιενεργού υλικού.