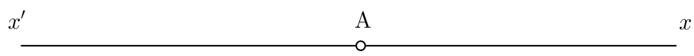
1 ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Οι πρωταρχικές έννοιες της Γεωμετρίας είναι **το σημείο**, **η ευθεία** και **το επίπεδο**. Δεχόμαστε ότι:

- Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει σε αυτήν.

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς διακοπές και κενά.

1.1 Η ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ



Έστω μία ευθεία $x'x$ και ένα σημείο της A. Το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax' και Ax και τα ονομάζουμε **ημιευθείες** με αρχή το σημείο A.
Η ευθεία $x'x$ λέγεται **φορέας** της ημιευθείας Ax.
Δύο ημιευθείες Ax' και Ax που έχουν τον ίδιο φορέα και μοναδικό κοινό σημείο την αρχή τους A λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.

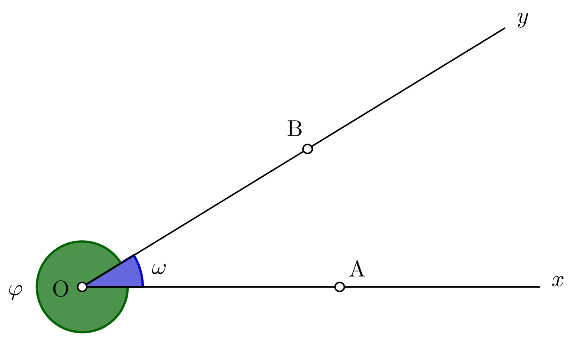
1.2 ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Σε μία ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A και B. **Ευθύγραμμο τμήμα** AB ή BA λέμε το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία A και B και τα σημεία της ευθείας (ε) που βρίσκονται ανάμεσά τους.
Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται **απόσταση** των σημείων A και B.
Μέσον ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται το μοναδικό εσωτερικό σημείο M του τμήματος με την ιδιότητα $AM = MB$. Τα σημεία A και B λέγονται **συμμετρικά σημεία** ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο M.

1.3 ΤΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ

Έστω ένα επίπεδο (Π) και μία ευθεία (ε) του επιπέδου. Η ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη (Π_1) και (Π_2). Κάθε ένα από αυτά τα μέρη μαζί με τα σημεία της (ε) ονομάζεται **ημιεπίπεδο**.

1.4 Η ΓΩΝΙΑ



Από ένα τυχαίο σημείο O ενός επιπέδου φέρνουμε δύο ημιευθείες Ox και Oy οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) λέγεται **κυρτή γωνία** με **κορυφή** O και **πλευρές** Ox και Oy. Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Ox και Oy αποτελούν την **μη κυρτή γωνία** με κορυφή O και πλευρές Ox και Oy.

Διχοτόμος μίας γωνίας λέγεται η μοναδική ημιευθεία που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και τις μη κοινές πλευρές τους εκατέρωθεν της κοινής πλευράς.
Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία λέγονται **συμπληρωματικές**.
Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία λέγονται **παραπληρωματικές**.
Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν** αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
2. Η προέκταση της διχοτόμου μίας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.
3. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

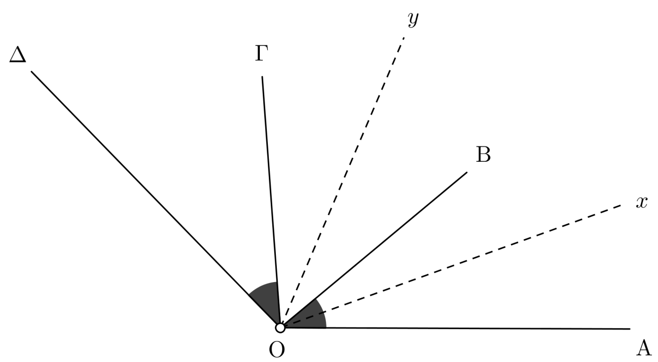
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 20)
   Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.

2. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 21)
   Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, την διχοτόμο της $O\Delta$ και τυχαία ημιευθεία $O\Gamma$ στο εσωτερικό της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου OA' είναι η αντικείμενη ημιευθεία της ημιευθείας OA. Να αποδείξετε ότι:
   $$\Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$$

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει:
   $$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$$

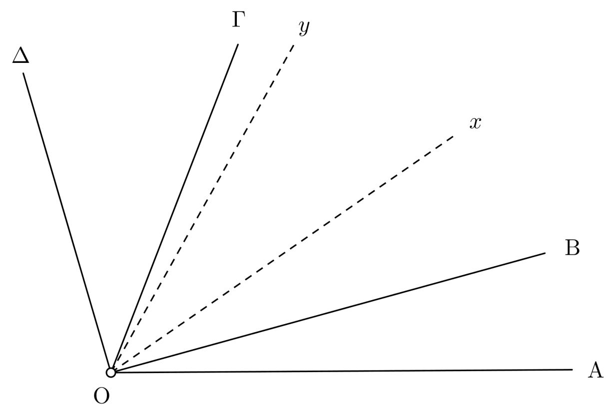


   (α΄) Να αποδείξετε ότι:
   $$A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$$

(β′) Αν Ox και Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$x\hat{O}y = \frac{B\hat{O}\Delta}{2}$$

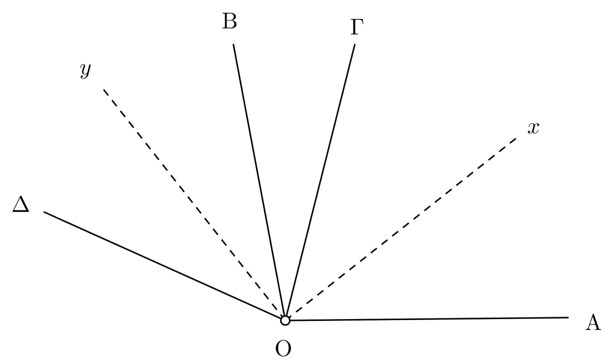
4. Στο παρακάτω σχήμα η Ox είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$ και η Oy είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{O}\Delta$.



Να αποδείξετε ότι:

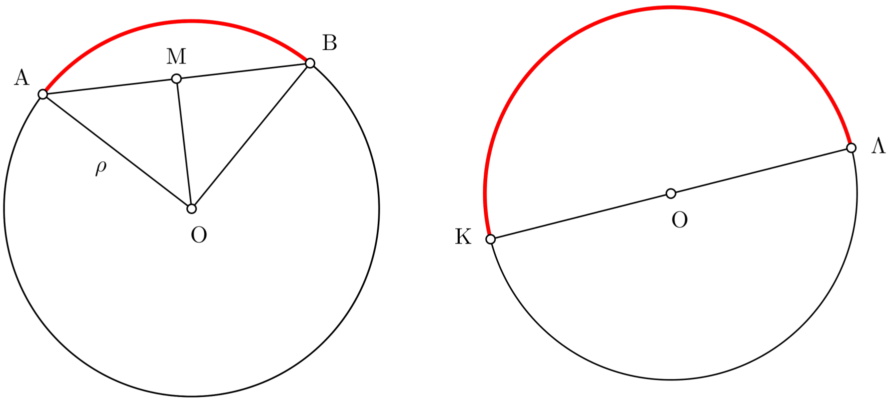
$$x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}B + \Gamma\hat{O}\Delta}{2}$$

5. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.



Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι Ox και Oy των γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, είναι κάθετες.

2 ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ



Η ΚΛ είναι μία διάμετρος του κύκλου.
Τα σημεία Κ και Λ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

Έστω ένα σταθερό σημείο O και ένα τμήμα $K\Lambda = \rho$. **Κύκλος** με **κέντρο** O και **ακτίνα** ρ λέγεται ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν από το σημείο O απόσταση ίση με ρ. Θα συμβολίζουμε τον κύκλο (O, ρ). Δύο κύκλοι λέμε ότι είναι ίσοι όταν έχουν ίσες ακτίνες.
Έστω ένας κύκλος με κέντρο O και δύο σημεία του A και B. Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη το κάθε ένα από τα οποία λέγεται **τόξο** του κύκλου.
Το ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται **χορδή** του κύκλου. Μία χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου ενώ τα σημεία στα άκρα της διαμέτρου λέγονται **αντιδιαμετρικά** σημεία του κύκλου. Κάθε ένα από τα δύο ίσα τόξα στα οποία διαιρείται ένας κύκλος από μία διάμετρό του ονομάζεται **ημικύκλιο**, ενώ κάθε ένα από τα τέσσερα ίσα τόξα στα οποία διαιρείται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους του ονομάζεται **τεταρτοκύκλιο**.
Το κάθετο τμήμα που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς την χορδή λέγεται **απόστημα** της χορδής.
Μία γωνία που η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη** γωνία. Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο σε δύο σημεία και το τόξο που βρίσκεται στο εσωτερικό της και έχει άκρα τα σημεία αυτά λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Λέμε επίσης ότι η επίκεντρη γωνία **βαίνει** στο τόξο αυτό.
Μονάδα μέτρησης των τόξων είναι η **μοίρα**. Το τόξο μίας μοίρας ορίζεται το τόξο που είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του κύκλου και συμβολίζεται 1°. Ολόκληρος ο κύκλος είναι τόξο 360°. Το ημικύκλιο είναι τόξο 180° και το τεταρτοκύκλιο είναι τόξο 90°. Ορίζουμε ως μέτρο μίας επίκεντρης γωνίας το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της. Μία γωνία που έχει μέτρο λιγότερο από 90° λέγεται **οξεία**, μία γωνία που έχει μέτρο 90° λέγεται **ορθή**, ενώ μία γωνία που έχει μέτρο περισσότερο από 90° και λιγότερο από 180° λέγεται **αμβλεία**.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Οι ακτίνες ενός κύκλου είναι ίσες.
2. Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.
3. Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιότροπα άνισες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 25)
Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$. Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το O και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι:
$$AB = \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad A\Gamma = B\Delta$$

2. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 28)
   Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι κάθε μία από τις γωνίες αυτές.

3. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 28)
   Η παραπληρωματική μίας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής της γωνίας ω. Να υπολογίσετε την γωνία ω.

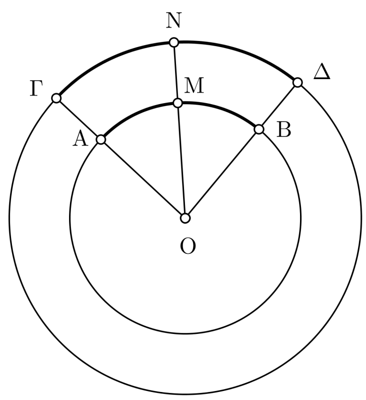
4. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 28)
   Σε ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου AB θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε: $\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$. Να βρείτε τα μέτρα:

   (α′) των τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

   (β′) των γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}B$.

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Στο παρακάτω σχήμα οι δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι με κέντρο O. Αν M είναι το μέσον του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, να αποδείξετε ότι το N είναι το μέσον του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



6. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 40°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$. Αν Δ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του B, να υπολογίσετε τις κυρτές γωνίες $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ καθώς και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}$.

7. Σε έναν κύκλο θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και έστω M, N τα μέσα τους αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

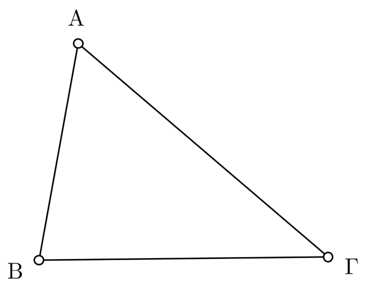
   (α′) $\overset{\frown}{MN} = \dfrac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$.

   (β′) $\overset{\frown}{AN} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$.

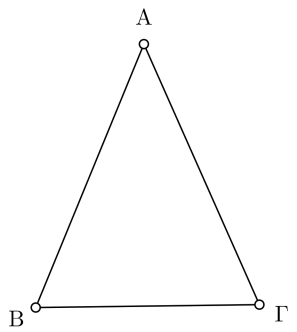
3 ΤΡΙΓΩΝΟ-ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου.
Το άθροισμα των τριών πλευρών του ονομάζεται **περίμετρος** του τριγώνου και συμβολίζεται 2τ.
Ανάλογα με την σύγκριση των πλευρών του ένα τρίγωνο λέγεται:

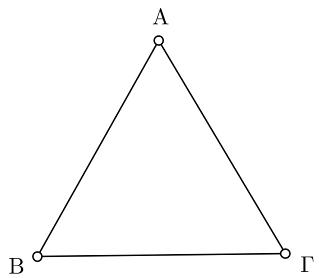
- **σκαληνό** όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.
- **ισοσκελές** όταν έχει δύο πλευρές του ίσες.
- **ισόπλευρο** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



σκαληνό τρίγωνο



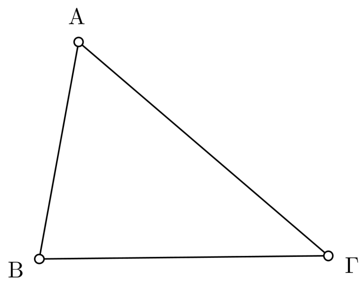
ισοσκελές τρίγωνο



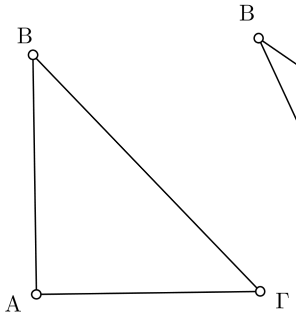
ισόπλευρο τρίγωνο

Ανάλογα με την σύγκριση των γωνιών του ένα τρίγωνο λέγεται:

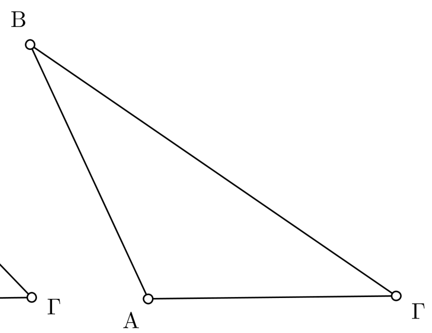
- **οξυγώνιο** όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- **ορθογώνιο** όταν έχει μία γωνία του ορθή.
- **αμβλυγώνιο** όταν έχει μία γωνία του αμβλεία.



οξυγώνιο τρίγωνο

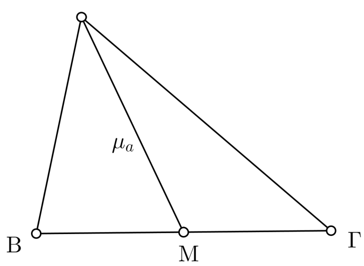


ορθογώνιο τρίγωνο



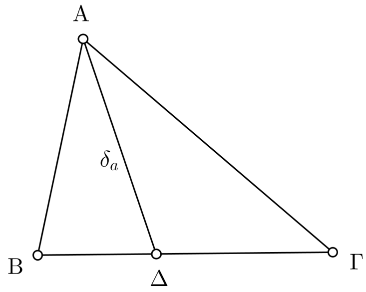
αμβλυγώνιο τρίγωνο

Τα **δευτερεύοντα στοιχεία** ενός τριγώνου είναι:
Η **διάμεσος** του τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσον της απέναντι πλευράς.



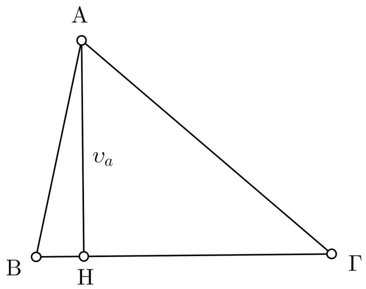
διάμεσος τριγώνου

Η **διχοτόμος** μίας γωνίας του τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας του τριγώνου από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.



διχοτόμος τριγώνου

Το **ύψος** του τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή του τριγώνου προς τον φορέα της απέναντι πλευράς του.



ύψος τριγώνου

3.1 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν όλες τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα. Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες**.
1^o κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ): Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες.
2^o κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ): Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες, ίσες μία προς μία.
3^o κριτήριο ισότητας (ΠΠΠ): Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

3.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν:

- έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- έχουν μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.
- έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία.
- έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 4/Εμπέδωσης/Σελίδα 38)
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην ημιευθεία $A\Delta$ θεωρούμε τα σημεία E και Z ώστε $AE = AB$ και $AZ = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

$$A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$$

2. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 43)
Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_a = \delta_{a'}$. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

   (β′) $a = a'$ και $\gamma = \gamma'$.

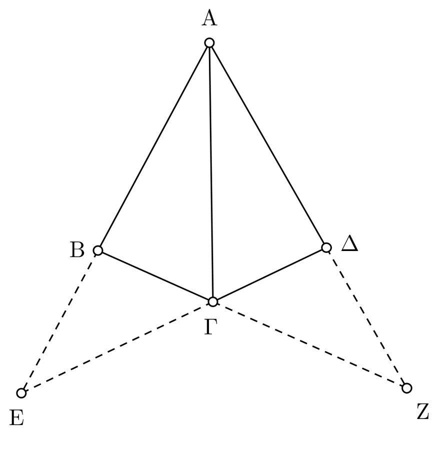
3. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 43)
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

4. (Άσκηση 4/Εμπέδωσης/Σελίδα 48)
Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

5. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 48)
Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσον του τμήματος.

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.



   (α′) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

   (β′) Αν οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο E και οι ευθείες $B\Gamma$ και $A\Delta$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $\Delta\Gamma Z$ είναι ίσα.

7. Στις πλευρές Ox και Oy μίας γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε $OA = OB$. Έστω σημείο M της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι $MA = MB$.

(β′) Η ευθεία AM τέμνει την Oy στο σημείο $\varGamma$ και η ευθεία BM τέμνει την Ox στο σημείο $\varDelta$. Να αποδείξετε ότι:

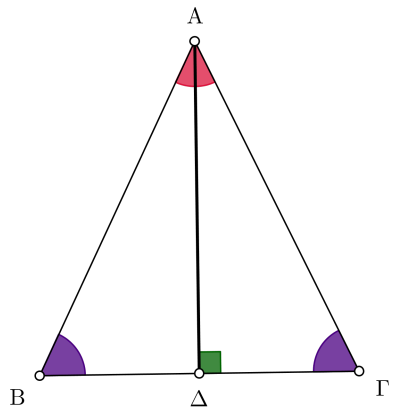
i. $A\varGamma = B\varDelta$.

ii. $M\varGamma = M\varDelta$.

iii. $B\varGamma = A\varDelta$.

8. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και μία ευθεία (ε) που διέρχεται από το μέσον του M. Στα σημεία A και B φέρνουμε κάθετες ευθείες στο τμήμα AB οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $\varGamma$ και $\varDelta$ αντίστοιχα. Αν K είναι τυχαίο σημείο του τμήματος $A\varGamma$ και η ευθεία KM τέμνει το τμήμα $B\varDelta$ στο σημείο $\varLambda$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $K\varGamma M$ και $\varLambda\varDelta M$ είναι ίσα.

4 ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ



Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

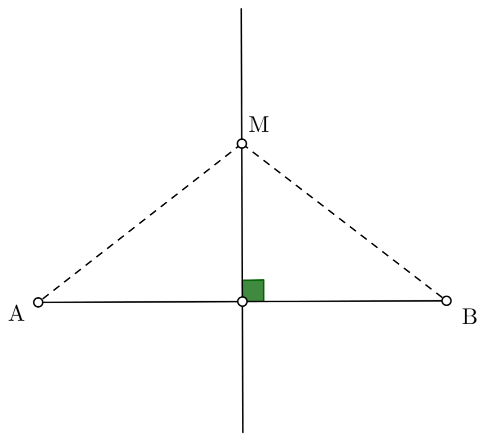
- Οι προσκείμενες στην βάση του γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του είναι διάμεσος και ύψος.

Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

- Δύο πλευρές του είναι ίσες.
- Δύο γωνίες του είναι ίσες.
- Ένα από τα δευτερεύοντα στοιχεία του ταυτίζεται με κάποιο άλλο.

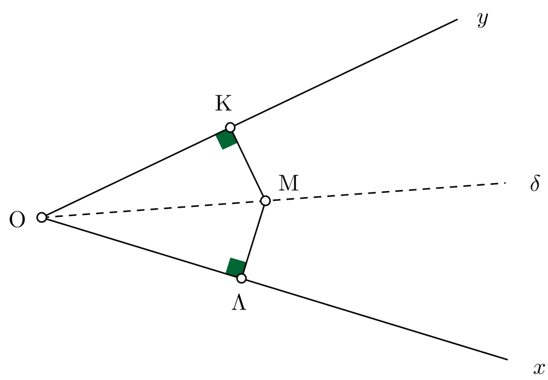
4.1 ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Η **μεσοκάθετος** ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.



4.2 ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

Η **διχοτόμος** μίας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες. Κάθε μία είναι ίση με 60°.
2. Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες.
3. Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα.
4. Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα αποστήματά τους είναι ίσα.
5. Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 38)
   Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του BA και ΓA θεωρούμε ίσα τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα. Αν M είναι το μέσον της βάσης του $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

2. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 38)
   Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές AB, $B\Gamma$, ΓA και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = AM$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.

3. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 38)
   Δίνεται κύκλος με κέντρο O και μία χορδή του AB. Προεκτείνουμε την AB και προς τα δύο της άκρα κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
   $$O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$$

4. (Άσκηση 5/Αποδεικτικές/Σελίδα 48)
   Δίνεται κύκλος με κέντρο O και δύο ίσες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$. Τα αντίστοιχα αποστήματα των χορδών είναι τα OK και $O\Lambda$. Οι προεκτάσεις των χορδών BA και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο σημείο M έξω από τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) Τα τρίγωνα OMK και $OM\Lambda$ είναι ίσα.
   (β΄) $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$.

5. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 48)
   Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

6. (Άσκηση 9/Εμπέδωσης/Σελίδα 57)
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) Το τρίγωνο $IB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
   (β΄) Η AI είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

7. (Άσκηση 5/Αποδεικτικές/Σελίδα 48)
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και την διχοτόμο του $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Οι ευθείες ΔE και AB τέμνονται στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

8. (Άσκηση 1/Σύνθετες/Σελίδα 48)
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την μεσοκάθετο της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Έστω E και Z οι προβολές του σημείου Δ πάνω στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma Z$.

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Δίνονται δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ και δύο σημεία A και B της Oy. Θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ των Ox και Oz αντίστοιχα, ώστε $O\Gamma = OA$ και $O\Delta = OB$. Αν M και N είναι τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $OM \perp ON$.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω M, N τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την βάση $B\Gamma$ κατά ίσα τμήματα $B\Delta$ και ΓE. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEN είναι ίσα.

11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ και την προέκταση της BA στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BE\Delta$ και $\Gamma E\Delta$ είναι ίσα.

12. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος του $B\Delta$. Θεωρούμε σημείο E της $B\Gamma$ ώστε $BE = AB$ και προεκτείνουμε την $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) $AZ = E\Gamma$.
   (β΄) τα σημεία Z, A, B είναι συνευθειακά.
   (γ΄) η $B\Delta$ είναι κάθετη στην ΓZ.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$. Από το Δ φέρνουμε κάθετη στην AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο K. Από το E φέρνουμε κάθετη στην $A\Gamma$ που τέμνει την AB στο Λ. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) $\Delta K = E\Lambda$.
   (β΄) αν οι ΔK και $E\Lambda$ τέμνονται στο M, τότε τα τρίγωνα $\Delta\Lambda M$ και EKM είναι ίσα.

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} < 90°$. Στα σημεία B και Γ φέρνουμε κάθετες Bx και Γy στην πλευρά $B\Gamma$. Η κάθετη από το A προς την πλευρά $A\Gamma$ τέμνει την Bx στο σημείο M και η κάθετη από το A προς την πλευρά AB τέμνει την Γy στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:
$$BM = \Gamma N$$

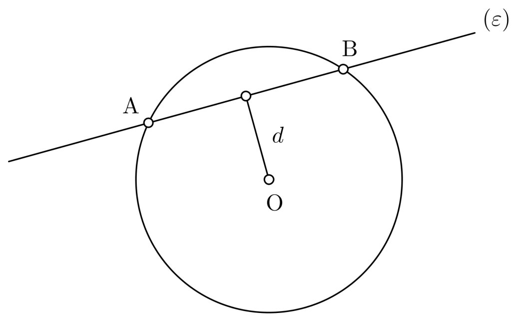
15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A θεωρούμε σημείο Δ ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της πλευράς ΓA προς το A θεωρούμε σημείο E ώστε $AE = AB$. Οι ευθείες $B\Gamma$ και ΔE τέμνονται στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

    (α′) Το τρίγωνο $Z\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

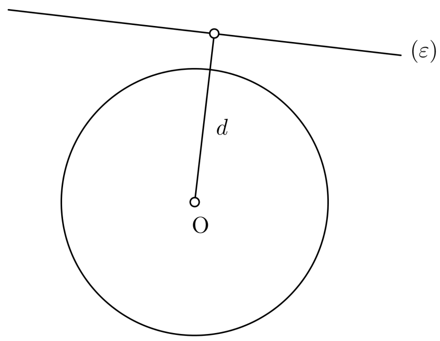
    (β′) Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Z}$ διέρχεται από το σημείο A.

5 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

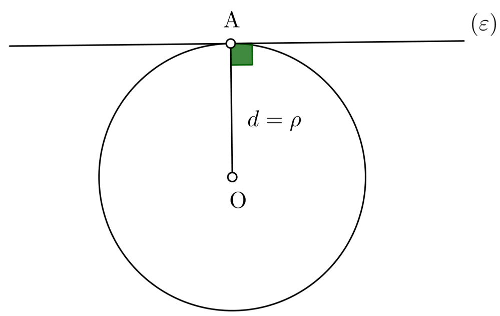
Έστω ένας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Θεωρούμε μία ευθεία (ε) και ονομάζουμε d την απόσταση του κέντρου O από την ευθεία (ε). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
Περίπτωση 1^{η}: Αν $d < \rho$, τότε η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία και στην περίπτωση αυτή λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου.



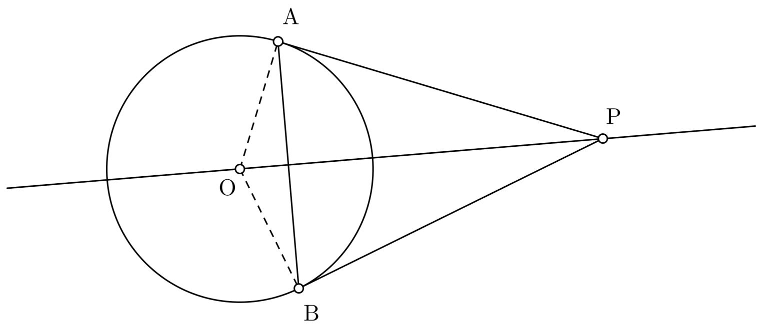
Περίπτωση 2^{η}: Αν $d > \rho$, τότε η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



Περίπτωση 3^{η}: Αν $d = \rho$, τότε η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου και το σημείο τομής τους λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο.



Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο του κύκλου, τότε από το P μπορούμε να φέρουμε δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο. Αν A και B είναι τα σημεία επαφής αυτών των εφαπτομένων με τον κύκλο, τότε τα τμήματα PA και PB λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου από το σημείο P και η ευθεία PO λέγεται **διακεντρική ευθεία** του σημείου P.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

2. Τα εφαπτόμενα τμήματα από εξωτερικό σημείο ενός κύκλου είναι ίσα.

3. Η διακεντρική ευθεία από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου που έχει άκρα τα σημεία επαφής.

4. Η διακεντρική ευθεία από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου είναι διχοτόμος της γωνίας των εφαπτόμενων τμημάτων και της γωνίας των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 63)
Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους. Να αποδείξετε ότι όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό είναι ίσες.

2. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 63)
Δίνεται κύκλος με κέντρο O, μία διάμετρός του AB και οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) του κύκλου στα σημεία A και B αντίστοιχα. Μία τρίτη εφαπτομένη (ε_3) του κύκλου τέμνει τις εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία $\varGamma$ και $\varDelta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
$$\varGamma\hat{O}\varDelta = 90^\circ$$

3. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 63)
Από εξωτερικό σημείο M ενός κύκλου με κέντρο O φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου. Προεκτείνουμε την ακτίνα OB κατά τμήμα $B\varGamma$ ίσο με το OB. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}\varGamma$ είναι τριπλάσια της γωνίας $B\hat{M}\varGamma$.

4. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 63)
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου με κέντρο O φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Μία τρίτη εφαπτομένη σε σημείο E του κύκλου τέμνει τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB στα σημεία $\varGamma$ και $\varDelta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $P\varGamma\varDelta$ είναι ίση με $2PA$.

5. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 63)
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου με κέντρο O φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB του κύκλου. Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:
$$M\hat{A}P = M\hat{B}P$$

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Δίνεται κύκλος κέντρου O και δύο μη αντιδιαμετρικά του σημεία A και B. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο Γ. Η ευθεία ΓO τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και E. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

7. Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο M εκτός του κύκλου. Από το M φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB προς τον κύκλο. Φέρνουμε την διάμετρο $\Gamma\Delta$ του κύκλου που είναι κάθετη στην ευθεία OM. Αν οι ευθείες MA και MB τέμνουν την ευθεία $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

   (α′) $AE = BZ$.

   (β′) $E\Gamma = Z\Delta$.

8. Δίνεται κύκλος κέντρου O και μία διάμετρός του AB. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και ένα τυχαίο σημείο M της ευθείας (ε) διαφορετικό του A. Αν N είναι το συμμετρικό του M ως προς το O, να αποδείξετε ότι η ευθεία BN εφάπτεται στον κύκλο.

9. Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο M εκτός του κύκλου. Από το M φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB προς τον κύκλο. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = MO$. Να αποδείξετε ότι:

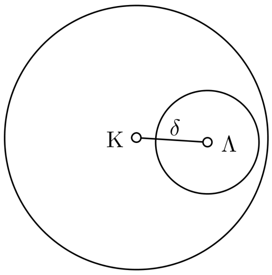
   (α′) $\Delta\hat{\Gamma}M = 90^\circ$.

   (β′) αν οι ευθείες $\Delta\Gamma$ και OB τέμνονται στο σημείο E, τότε το τρίγωνο $E\Delta O$ είναι ισοσκελές.

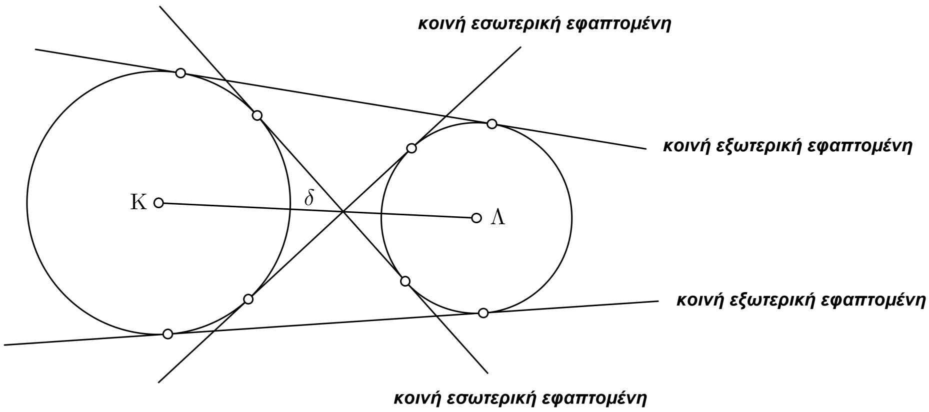
6 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda = \delta$ που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων ονομάζεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

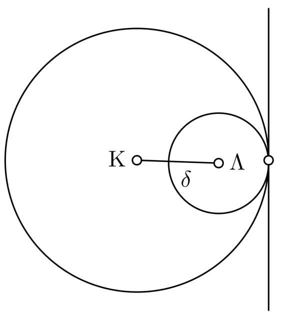
Περίπτωση 1^{η}: Αν $\delta < R - \rho$, ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (K, R). Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι δεν έχουν κοινές εφαπτομένες.



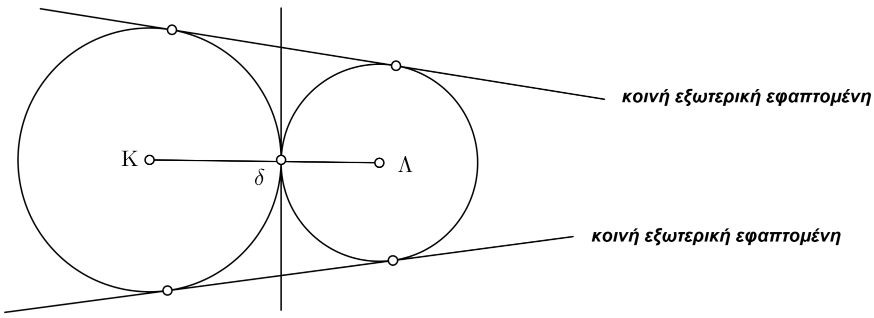
Περίπτωση 2^{η}: Αν $\delta > R + \rho$, ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου. Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι έχουν τέσσερις κοινές εφαπτομένες.



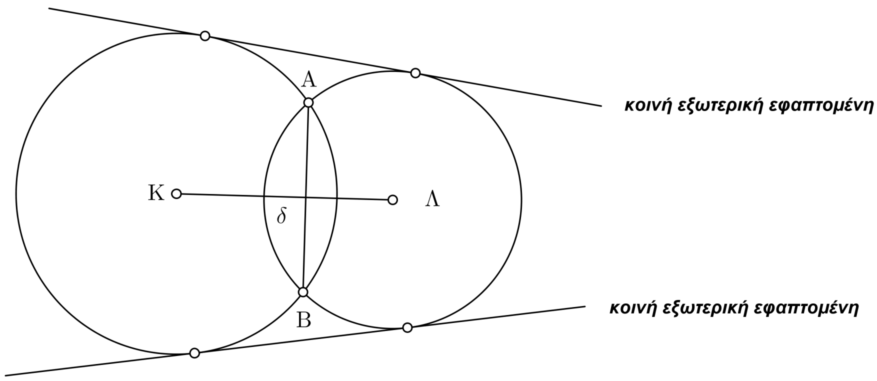
Περίπτωση 3^{η}: Αν $\delta = R - \rho$, οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και **εφάπτονται εσωτερικά**. Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι έχουν μία κοινή εφαπτομένη.



Περίπτωση 4^{η}: Αν $\delta = R + \rho$, οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και **εφάπτονται εξωτερικά**.Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι έχουν τρεις κοινές εφαπτομένες.



Περίπτωση 5^{η}: Αν $R-\rho < \delta < R+\rho$, οι κύκλοι **τέμνονται** και έχουν δύο κοινά σημεία. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Στην περίπτωση αυτή οι κύκλοι έχουν δύο κοινές εφαπτομένες.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
2. Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 65)
   Να προσδιορίσετε τις σχετικές θέσεις των κύκλων (K,ρ) και $(\varLambda,2\rho)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
   $i)\quad K\varLambda = \dfrac{\rho}{2}\quad ii)\quad K\varLambda=\rho\quad iii)\quad K\varLambda = 2\rho\quad iv)\quad K\varLambda=3\rho\quad v)\quad K\varLambda=4\rho$
2. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 66)
   Δίνεται κύκλος (O,R) και ένα εξωτερικό σημείο του P, ώστε $OP<2R$. Γράφουμε τον κύκλο $(O,2R)$. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) Ο κύκλος $(O,2R)$ τέμνει τον κύκλο (P,PO) σε δύο σημεία $\varGamma$ και $\varDelta$.
   (β΄) Τα ευθύγραμμα τμήματα $O\varGamma$ και $O\varDelta$ τέμνουν τον κύκλο (O,R) στα σημεία A και B.
   (γ΄) Τα τμήματα PA και PB εφάπτονται στον κύκλο (O,R).
3. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 66)
   Ένας κύκλος με κέντρο K είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου με κέντρο $\varLambda$. Μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μία κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο P. Να αποδείξετε ότι:
   $$K\hat{P}\varLambda = 90^\circ$$

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Δύο κύκλοι με κέντρα K και $\varLambda$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A και έστω M ένα σημείο της κοινής εσωτερικής τους εφαπτομένης. Από το M φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MB και $M\varGamma$ των κύκλων με κέντρα K και $\varLambda$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) $MB = M\varGamma$.

   (β′) $K\hat{B}\varGamma = \varLambda\hat{\varGamma}B$.

5. Δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι (K, R) και $(\varLambda, \rho)$ και έστω A, B τα κοινά σημεία τους. Προεκτείνουμε την κοινή χορδή AB κατά ίσα τμήματα $A\varGamma$ και $B\varDelta$.

   (α′) Αν τα τμήματα $K\varGamma$ και $K\varDelta$ τέμνουν τον κύκλο (K, R) στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
   $$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BZ}$$

   (β′) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $K\varGamma\varLambda$ και $K\varDelta\varLambda$ είναι ίσα.

6. Δύο κύκλοι (K, R) και $(\varLambda, \rho)$ με $R > \rho$ εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο M. Έστω επίσης (ε) η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων και N το αντιδιαμετρικό σημείο του M στον κύκλο (K, R). Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα NA και NB του κύκλου $(\varLambda, \rho)$, οι προεκτάσεις των οποίων τέμνουν την (ε) στα σημεία $\varGamma$ και $\varDelta$ αντίστοιχα και τον κύκλο (K, R) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) Το τρίγωνο $N\varGamma\varDelta$ είναι ισοσκελές.

   (β′) Τα τρίγωνα $M\varGamma A$ και $M\varDelta B$ είναι ίσα.

   (γ′) $NE = NZ$ και $\varLambda E = \varLambda Z$.

7 ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
2. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.
3. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.
4. (**Η τριγωνική ανισότητα**) Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την διαφορά τους.
   Γενικότερα: Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB είναι μικρότερο από την περίμετρο κάθε πολυγωνικής γραμμής με άκρα τα σημεία A και B.
5. Η μεγαλύτερη χορδή ενός κύκλου είναι η διάμετρός του.
6. Το κάθετο τμήμα που άγεται από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο τμήμα που άγεται από το σημείο προς την ευθεία.
7. Αν δύο πλάγια τμήματα που άγονται από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου που άγεται από το σημείο προς την ευθεία είναι ομοιότροπα άνισες και αντίστροφα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 5/Εμπέδωσης/Σελίδα 57)
   Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $AM < AB$.

2. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 58)
   Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσον της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
   $$A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$$

3. (Άσκηση 1/Σύνθετες/Σελίδα 58)
   Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και O ένα σημείο στο εσωτερικό του.
   (α′) Να αποδείξετε ότι:
   $$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$$
   (β′) Για ποιά θέση του σημείου O το άθροισμα $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ γίνεται ελάχιστο;

4. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 60)
   Στις κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
   $$\Delta E < EB \text{ και } \Delta E < B\Gamma$$

5. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 60)
   Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB, ένα σημείο P της μεσοκαθέτου του τμήματος και μία ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο A.

(α′) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του σημείου P από την ευθεία (ε) και το σημείο B.

(β′) Ποιά πρέπει να είναι η θέση της ευθείας (ε), ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Θεωρούμε έναν κύκλο κέντρου O, μία διάμετρό του AB και ένα εσωτερικό σημείο Σ της ακτίνας OA. Αν M είναι σημείο του κύκλου διαφορετικό από τα σημεία A και B, να αποδείξετε ότι:

$$\Sigma A < \Sigma M < \Sigma B$$

7. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε τυχαία σημεία A', B', Γ' των πλευρών του $B\Gamma$, $A\Gamma$, AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2}\left(AB + B\Gamma + \Gamma A\right) < AA' + BB' + \Gamma\Gamma' < \frac{3}{2}\left(AB + B\Gamma + \Gamma A\right)$$

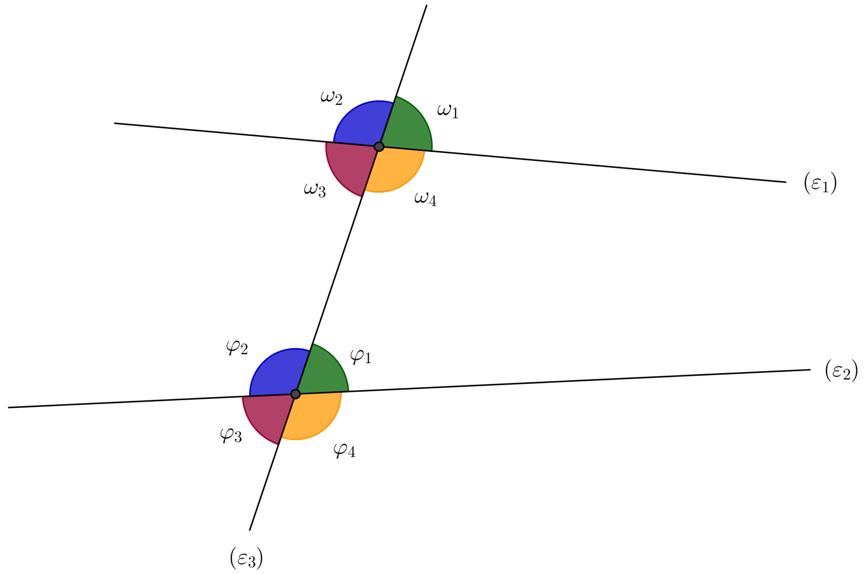
8. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$. Στην πλευρά της Ox θεωρούμε δύο σημεία A και B με $OA < OB$. Στην πλευρά της Oy θεωρούμε δύο σημεία Γ και Δ με $O\Gamma < O\Delta$. Φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$A\Gamma < B\Delta$$

8 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

8.1 ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

Δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται **παράλληλες**.
Αν θεωρήσουμε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία (ε_3), τότε παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες (ε_1) και (ε_2) ονομάζονται **εντός**, ενώ αυτές που δεν είναι ανάμεσά τους λέγονται **εκτός**. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας (ε_3) λέγονται **επί τα αυτά μέρη**, ενώ αν βρίσκονται εκατέρωθεν της τέμνουσας (ε_3) λέγονται **εναλλάξ**.



(**Το Ευκλείδειο αίτημα**) Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς την ευθεία.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
2. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
3. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.
4. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
5. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
6. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη ευθεία σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.
7. Δύο ευθείες που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
8. Δύο ευθείες που είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
9. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη είναι αμβλεία.

10. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη είναι αμβλεία.

8.2 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με $180°$.
2. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
3. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
4. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι ίσο με $2\text{ν} - 4$ ορθές γωνίες.
5. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι ίσο με 4 ορθές γωνίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 82)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία (ε) παράλληλη στην βάση του $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

2. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 82)
Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο A της διχοτόμου της. Η παράλληλη από το A προς την Ox τέμνει την Oy στο σημείο B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BAO είναι ισοσκελές.

3. (Άσκηση 4/Εμπέδωσης/Σελίδα 82)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς AB. Αν ο κύκλος $(\Delta, \Delta B)$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$.

4. (Άσκηση 5/Εμπέδωσης/Σελίδα 82)
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του BA και ΓA παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

5. (Άσκηση 6/Εμπέδωσης/Σελίδα 82)
Δίνεται κύκλος (O, ρ), μία χορδή του AB και το μέσον M της χορδής. Φέρνουμε $Ox \perp OM$. Να αποδείξετε ότι $Ox \parallel AB$.

6. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 82)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM. Φέρνουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε στην Γx τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

7. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 82)
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Από την κορυφή B φέρνουμε $Bx \parallel A\Delta$ που τέμνει την προέκταση της ΓA στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

$$E\Gamma = AB + A\Gamma$$

8. (Άσκηση 2/Σύνθετες/Σελίδα 83)
Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος AB φέρνουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Ax και By. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του AB και στις Ax, By τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και $BE = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.

9. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 87)
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}_{\epsilon\xi} = 144°$. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

10. (Άσκηση 4/Εμπέδωσης/Σελίδα 87)
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$$

11. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 87)
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B}_{\epsilon\xi} = 90° + \dfrac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $AB = A\Gamma$.

12. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 87)
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και την διχοτόμο AE. Να αποδείξετε ότι:

$$\Delta\hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

13. (Άσκηση 5/Αποδεικτικές/Σελίδα 87)
Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε $\Delta E \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

$$\hat{A} = E\hat{\Delta}\Gamma$$

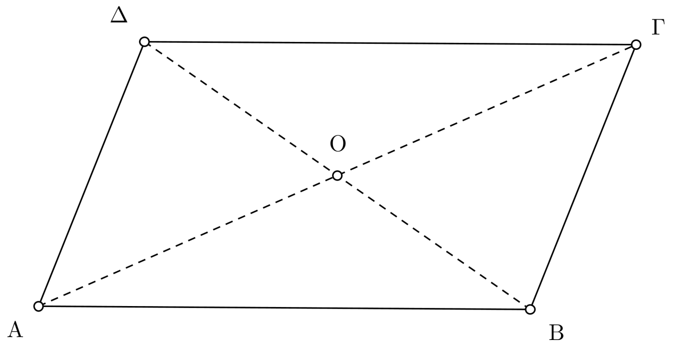
14. (Άσκηση 6/Αποδεικτικές/Σελίδα 87)
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BZ τέμνονται στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

15. (Άσκηση 1/Σύνθετες/Σελίδα 88)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB. Στην προέκταση της ΓA παίρνουμε τμήμα $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \perp B\Gamma$.

16. (Άσκηση 2/Σύνθετες/Σελίδα 88)
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία κάθετη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

$$E\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

9 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ



Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
Σε ένα παραλληλόγραμμο ισχύουν:

1. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
2. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
3. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 99)
   Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την $ΓΔ$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:
   $$ΔE = BΓ$$
2. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 99)
   Έστω O το κέντρο ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$. Αν E και Z είναι σημεία των OA και $OΓ$ αντίστοιχα, ώστε $OE = OZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BEΔZ$ είναι παραλληλόγραμμο.
3. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 99)
   Έστω E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $ΓΔ$ αντίστοιχα, ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) Το τετράπλευρο $AEΓZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

   (β΄) Οι ευθείες $AΓ$, $BΔ$ και EZ συντρέχουν.

4. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 99)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$. Από το M φέρνουμε $Mx \parallel AB$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E και $My \parallel A\Gamma$ που τέμνει την AB στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:
$$M\Delta + ME = AB$$

5. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 100)
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$ και την ΔA κατά τμήμα $AZ = \Delta A$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Z, B και E είναι συνευθειακά.

6. (Άσκηση 4/Αποδεικτικές/Σελίδα 100)
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των διαμέσων του $B\Delta$ και ΓE θεωρούμε σημεία H και Z αντίστοιχα, ώστε $\Delta H = B\Delta$ και $ZE = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) $AH = AZ$.
   (β΄) Τα σημεία Z, A και H είναι συνευθειακά.

7. (Άσκηση 2/Σύνθετες/Σελίδα 100)
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BE = B\Gamma$ και επί της ημιευθείας ΔA θεωρούμε σημείο Z ώστε $\Delta Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
$$Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ$$

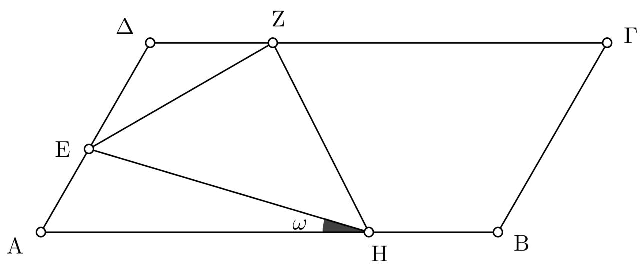
ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Να υπολογίσετε τις γωνίες παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αν γνωρίζετε ότι η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την γωνία $\hat{\Delta}$ κατά 40°.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα K, Λ των πλευρών του $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την AK προς το K και παίρνουμε τμήμα $KZ = AK$. Προεκτείνουμε την $A\Lambda$ προς το Λ και παίρνουμε τμήμα $\Lambda H = A\Lambda$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔBHZ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα K και Λ οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Θεωρούμε σημείο M στον έναν κύκλο και σημείο N στον άλλον κύκλο έτσι ώστε $M\hat{A}N = 90^\circ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, Λ, M, N είναι παραλληλόγραμμο.

11. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, $\Delta E = \Delta Z$ και $ZE = ZH$.



Αν $\omega = 20^\circ$ και $\hat{A} = 60^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $Z\hat{E}H$ και $E\hat{Z}H$.

12. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε τα σημεία E, Z των πλευρών του AB και $ΓΔ$ αντίστοιχα ώστε $AE = ΓZ$ και τα σημεία H, $Θ$ των πλευρών του $AΔ$ και $BΓ$ αντίστοιχα ώστε $AH = ΓΘ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EHZΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.

13. Σε ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $AB = 2BΓ$ θεωρούμε το μέσον E της πλευράς AB. Να αποδείξετε ότι:

    (α′) Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ διέρχεται από το μέσον του $ΓE$ και της πλευράς $ΓΔ$.

    (β′) Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται κάθετα σε σημείο της $ΓΔ$.

14. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο E και στην πλευρά του $ΓΔ$ θεωρούμε σημείο Z ώστε $AE = ΓZ$. Έστω H το μέσον του $ΔE$ και $Θ$ το μέσον του BZ. Να αποδείξετε ότι:

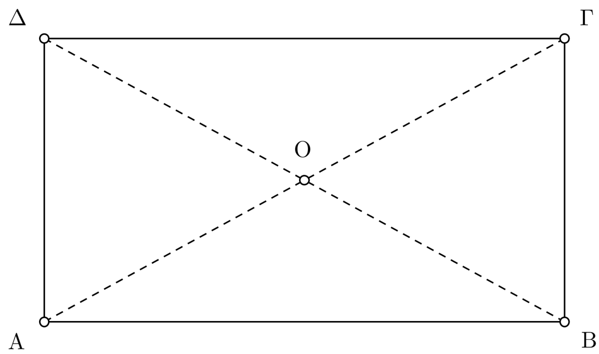
    (α′) Τα τετράπλευρα $AEΓZ$ και $ΔEBZ$ είναι παραλληλόγραμμα.

    (β′) Το τετράπλευρο $HEΘZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

    (γ′) Το τετράπλευρο $AΘΓH$ είναι παραλληλόγραμμο.

9.1 ΕΙΔΙΚΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

9.1.1 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.
Σε ένα ορθογώνιο ισχύουν:

1. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.

2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

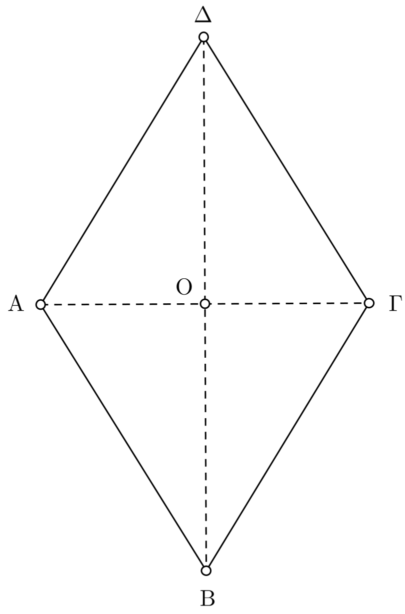
- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.

- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

- Έχει τρεις ορθές γωνίες.

- Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

9.1.2 ΡΟΜΒΟΣ



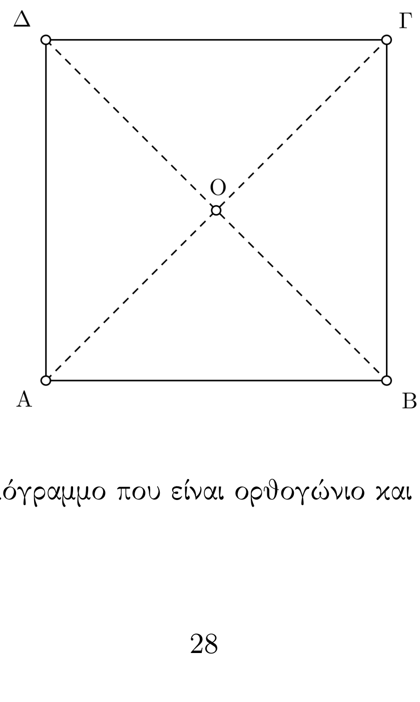
Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
Σε ένα ρόμβο ισχύουν:

1. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
2. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
3. Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

- Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

9.1.3 ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 103)
   Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ φέρνουμε $AE \perp \Gamma\Delta$ και $\Gamma Z \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

2. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 104)
   Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $B\Delta$ και το μέσον M της $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο E. Η EM τέμνει την $B\Gamma$ στο Z. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.

3. (Άσκηση 5/Εμπέδωσης/Σελίδα 103)
   Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O. Θεωρούμε δύο σημεία E και Z της $A\Gamma$, ώστε:
   $$OE = OZ = OB = O\Delta$$
   Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι τετράγωνο.

4. (Άσκηση 6/Εμπέδωσης/Σελίδα 103)
   Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις πλευρές AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA παίρνουμε τα σημεία K, Λ, M, N αντίστοιχα, τέτοια ώστε:
   $$AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$$
   Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι τετράγωνο.

5. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 104)
   Στις πλευρές AB και $B\Gamma$ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) $AZ = \Delta E$.
   (β′) $AZ \perp \Delta E$.

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρνουμε $AZ \perp B\Gamma$ και από την κορυφή Γ φέρνουμε $\Gamma E \perp A\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

7. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Οι διχοτόμοι των γωνιών του τέμνονται ανά δύο στα σημεία E, Z, H, Θ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν αυτά τα σημεία είναι τετράγωνο.

8. Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180°$. Οι φορείς των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E, ενώ οι φορείς των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο Z. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{E}$ και $\hat{Z}$ τέμνουν τις πλευρές του τετραπλεύρου στα σημεία K, Λ, M, N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν αυτά τα σημεία είναι ρόμβος.

9. Δίνεται ένας ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Με κέντρα τα σημεία A και Γ και ακτίνα $\rho < \frac{A\Gamma}{2}$ γράφουμε δύο κύκλους, από τους οποίους ο πρώτος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, ενώ ο δεύτερος κύκλος τέμνει τις πλευρές $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Θ και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

10. Έστω $\varDelta$ και E οι προβολές της κορυφής B ενός τριγώνου $AB\varGamma$ στις διχοτόμους της γωνίας $\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι:

    (α΄) Το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία A, $\varDelta$, B, E είναι ορθογώνιο.

    (β΄) Η ευθεία $\varDelta E$ διέρχεται από το μέσον της πλευράς AB και είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\varGamma$.

11. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\varGamma\varDelta$. Προεκτείνουμε την διαγώνιο $A\varGamma$ και προς τις δύο κατευθύνσεις και στις προεκτάσεις θεωρούμε σημεία E και H ώστε:

$$AE = \varGamma H = \frac{B\varDelta}{2}$$

    Όμοια προεκτείνουμε την διαγώνιο $B\varDelta$ και προς τις δύο κατευθύνσεις και στις προεκτάσεις θεωρούμε σημεία Z και $\varTheta$ ώστε:

$$BZ = \varDelta\varTheta = \frac{A\varGamma}{2}$$

    Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\varTheta$ είναι ορθογώνιο.

12. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\varGamma\varDelta$. Να αποδείξετε ότι:

    (α΄) Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του τεμνόμενες ανά δύο σχηματίζουν ορθογώνιο.

    (β΄) Οι διαγώνιοι του παραπάνω ορθογωνίου είναι παράλληλες προς τις πλευρές του παραλληλογράμμου.

    (γ΄) Το άθροισμα των διαγωνίων του ορθογωνίου είναι ίσο με την περίμετρο του παραλληλογράμμου.

9.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ίσο με το μισό της.

2. Αν από το μέσον μίας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του τριγώνου, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσον της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

3. Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

4. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

5. Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

6. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

7. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι γωνία είναι ίση με 30°.

9.2.1 ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μία ευθεία παράλληλη στις ευθείες αυτές η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες. Η ευθεία αυτή λέγεται **μεσοπαράλληλη** των (ε_1) και (ε_2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 1/Εμπέδωσης/Σελίδα 111)
   Αν $\varDelta$ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\varGamma$ τριγώνου $AB\varGamma$ και Z είναι τυχαίο σημείο της πλευράς $B\varGamma$, να αποδείξετε ότι η $\varDelta E$ διχοτομεί το AZ.

2. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 111)
   Δίνεται τρίγωνο $AB\varGamma$ και η διάμεσός του $A\varDelta$. Αν E, Z και H είναι τα μέσα των $B\varDelta$, $A\varDelta$ και $A\varGamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\varDelta EZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

3. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 111)
   Σε τρίγωνο $AB\varGamma$ φέρνουμε τα ύψη $B\varDelta$ και $\varGamma E$. Αν M είναι το μέσον της $B\varGamma$, να αποδείξετε ότι:
   $$M\varDelta = ME$$

4. (Άσκηση 4/Εμπέδωσης/Σελίδα 111)
   Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\varGamma$ με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\varGamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
   $$EZ = A\varGamma$$

5. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 111)
   Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\varGamma\varDelta$ και τα μέσα E και Z των $B\varGamma$ και $\varGamma\varDelta$ αντίστοιχα. Αν η EZ τέμνει την διαγώνιο $A\varGamma$ στο σημείο H, να αποδείξετε ότι:
   $$\varGamma H = \frac{A\varGamma}{4}$$

6. (Άσκηση 1/Αποδεικτικές/Σελίδα 111)
   Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\varGamma$ και το ύψος του $A\varDelta$.

   (α΄) Αν E και Z είναι τα μέσα των AB και $A\varGamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
   $$E\hat{\varDelta}Z = 90^\circ$$

   (β΄) Αν M είναι το μέσον του EZ, να αποδείξετε ότι:
   $$\varDelta M = \frac{B\varGamma}{4}$$

7. (Άσκηση 9/Αποδεικτικές/Σελίδα 111)
   Δίνεται ορθογώνιο $AB\varGamma\varDelta$ και E, Z τα μέσα των AB και $B\varGamma$ αντίστοιχα. Αν H, K είναι οι προβολές των κορυφών A και $\varGamma$ στην διαγώνιο $B\varDelta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EH \perp KZ$.

8. (Άσκηση 1/Σύνθετες/Σελίδα 111)
   Σε τρίγωνο $AB\varGamma$ με $\hat{B} > \hat{\varGamma}$ φέρνουμε το ύψος του $A\varDelta$. Αν E, Z είναι τα μέσα των $A\varGamma$ και $B\varGamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
   $$\varDelta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\varGamma}$$

9. (Άσκηση 5/Σύνθετες/Σελίδα 111)
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσον της $B\Gamma$. Αν E είναι η προβολή του B στην διχοτόμο $A\Delta$, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $EM \parallel A\Gamma$.

   (β΄) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.

   (γ΄) $\Delta\hat{E}M = \dfrac{\hat{A}}{2}$.

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα τυχαίο σημείο Δ της πλευράς του $B\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta Z \perp AB$ και $\Delta E \perp A\Gamma$. Έστω H το μέσον του $B\Delta$ και Θ το μέσον του $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
$$2\,(ZH + E\Theta) = B\Gamma$$

12. Δίνεται ορθογώνιο και μη ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Φέρνουμε $AH \perp EZ$ και $\Delta\Theta \perp EZ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AH\Delta\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

13. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε $A\Delta \perp B\Gamma$, $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Η διάμεσος AM του τριγώνου τέμνει την ΔZ στο σημείο H. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ, M των πλευρών του AB, $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω Π_1 η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ και Π_2 η περίμετρος του τετραπλεύρου $AK\Lambda M$. Να αποδείξετε ότι:
$$\Pi_1 = \Pi_2 + A\Lambda + KM$$

15. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z των πλευρών του $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα ώστε $AE = \Delta Z$. Αν M, N είναι τα μέσα των EZ και BZ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $MN \perp EZ$.

   (β΄) Το άθροισμα $\Delta M + MN + \Gamma N$ ισούται με την ημιπερίμετρο του τριγώνου BEZ.

   (γ΄) Αν η MN προεκτεινόμενη τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο K, τότε $KE = KZ$.

16. Αν E, Z, H, Θ είναι τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και $A\Delta$ αντίστοιχα, ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ και K, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) Τα τετράπλευρα $EKH\Lambda$ και $ZK\Theta\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμα.

   (β΄) Οι ευθείες EH, $Z\Theta$ και $K\Lambda$ συντρέχουν.

17. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσον M της πλευράς του $B\Gamma$ και την διχοτόμο (ε) της εξωτερικής του γωνίας στο A. Από το B φέρνουμε κάθετη στην (ε) που τέμνει την (ε) στο σημείο Δ και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $AB = AE$.

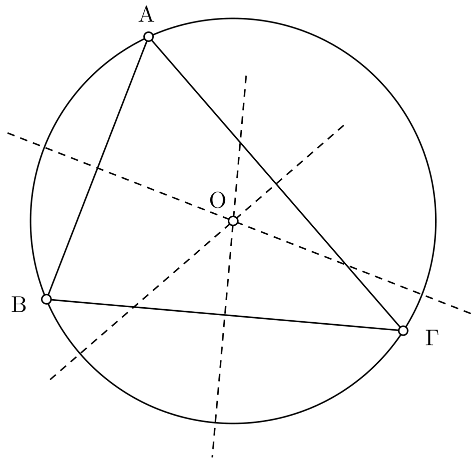
(β′) $M\Delta \parallel A\Gamma$.

(γ′) $M\Delta = \dfrac{AB + A\Gamma}{2}$.

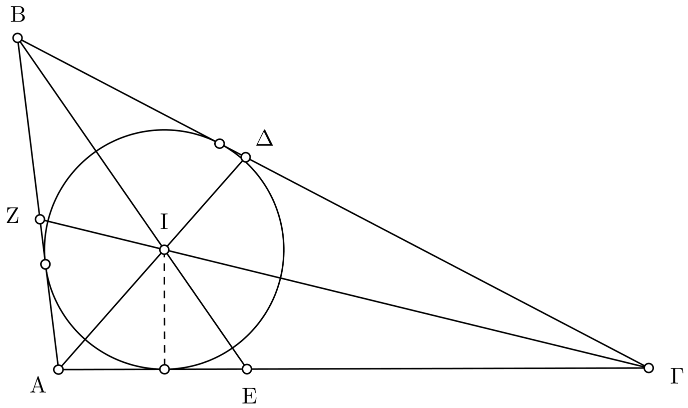
9.2.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

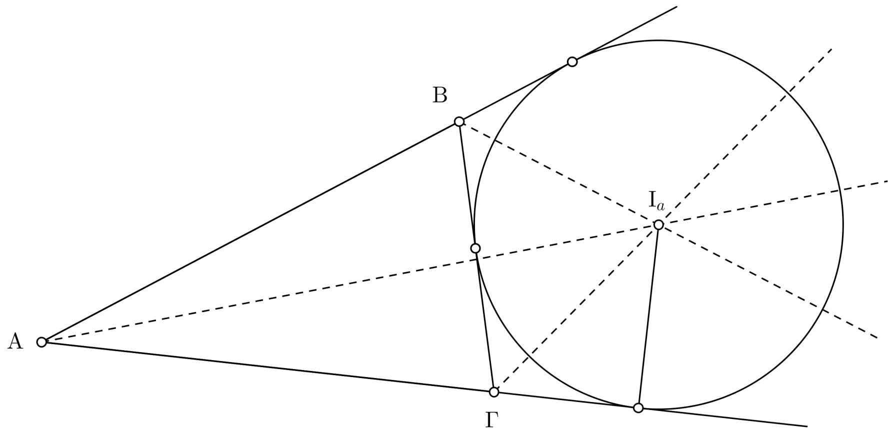
1. Οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου και είναι το κέντρο του **περιγεγραμμένου κύκλου** του τριγώνου, δηλαδή του κύκλου που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.



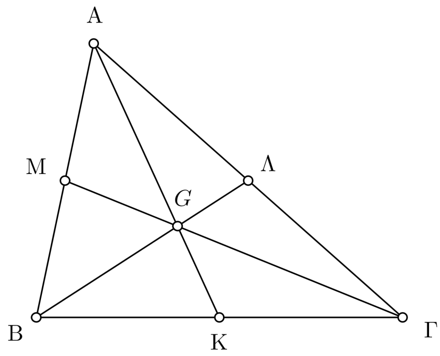
2. Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου και είναι το κέντρο του **εγγεγραμμένου κύκλου** του τριγώνου, δηλαδή του κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



3. Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **παράκεντρο** του τριγώνου και είναι το κέντρο του **παρεγγεγραμμένου κύκλου** του τριγώνου, δηλαδή του κύκλου που εφάπτεται στην μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων πλευρών του.

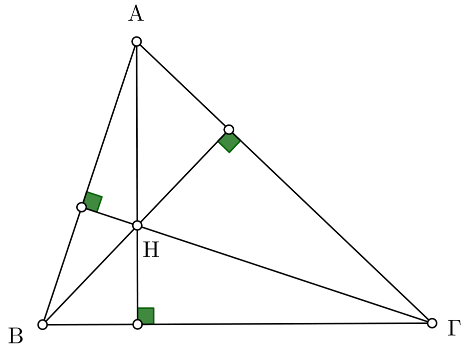


4. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου και απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.



κάθε διάμεσος χωρίζεται από το βαρύκεντρο σε δύο τμήματα εκ των οποίων το ένα είναι διπλάσιο από το άλλο.

5. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 4/Αποδεικτικές/Σελίδα 82)
Από το έγκεντρο I ενός τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\Delta E = B\Delta + \Gamma E$$

2. (Άσκηση 6/Εμπέδωσης/Σελίδα 111)
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την ΓA κατά τυχαίο τμήμα $A\Delta$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta H \perp B\Gamma$ η οποία τέμνει την AB στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E \perp \Delta B$.

3. (Άσκηση 4/Αποδεικτικές/Σελίδα 111)
Αν E, Z είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι οι ΔE και BZ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$.

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Από σημείο E της πλευράς AB φέρνουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει το ύψος στο σημείο Z. Φέρνουμε κάθετη στην ΓZ στο σημείο Z που τέμνει την ευθεία AB στο σημείο H και στην συνέχεια από το σημείο Z φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει τις πλευρές $B\Gamma$ και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

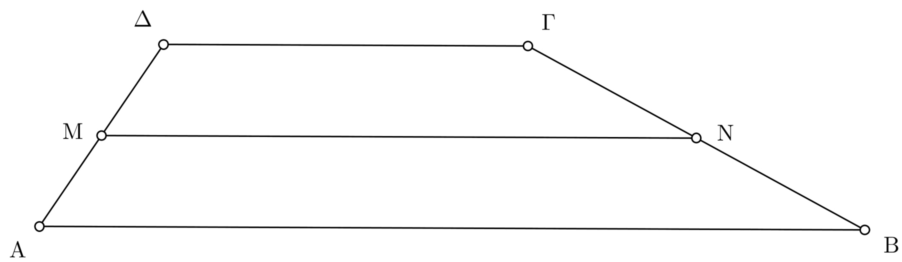
   (α΄) Το σημείο Z είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AM\Gamma$.

   (β΄) $AH = BE$.

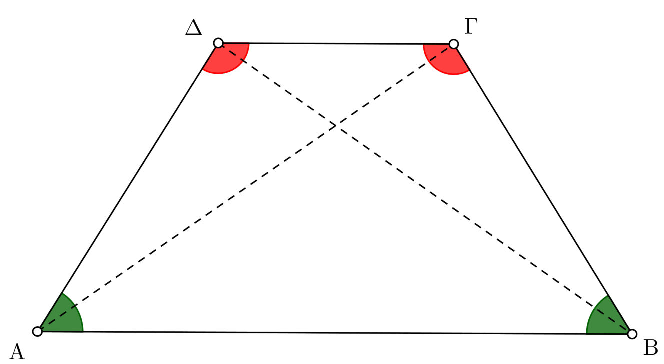
5. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O, μία χορδή του AB και ένα σημείο του Γ. Παίρνουμε ένα εσωτερικό σημείο της χορδής AB. Οι μεσοκάθετοι των τμημάτων $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι η ευθεία OM είναι η μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

9.2.3 ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.
Ένα τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο**.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου και ίση με το ημιάθροισμά τους.

2. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου ανήκει στον φορέα της διαμέσου του τραπεζίου και είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του τραπεζίου.

3. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες.

4. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιες είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 2/Εμπέδωσης/Σελίδα 115)
Αν $\varDelta$, E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\varGamma$ αντίστοιχα ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\varGamma$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\varDelta E\varGamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

2. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 115)
Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου $AB\varGamma\varDelta$ ($AB \parallel \varGamma\varDelta$) τέμνονται στο σημείο O. Αν E, Z, H, $\varTheta$ είναι τα μέσα των OA, OB, $O\varGamma$, $O\varDelta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\varTheta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. (Άσκηση 4/Εμπέδωσης/Σελίδα 115)
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\varGamma\varDelta$ και το ύψος του AE. Αν K, $\varLambda$ είναι τα μέσα των $A\varDelta$ και $B\varGamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\varLambda\varGamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. (Άσκηση 6/Εμπέδωσης/Σελίδα 115)
Από την κορυφή A τριγώνου $AB\varGamma$ φέρνουμε ευθεία (ε) που δεν τέμνει το τρίγωνο και έστω BB' και $\varGamma\varGamma'$ οι αποστάσεις των B και $\varGamma$ από την ευθεία (ε). Αν M είναι το μέσον του $B'\varGamma'$ και K είναι το μέσον της διαμέσου $A\varDelta$, να αποδείξετε ότι:
$$MK = \frac{A\varDelta}{2}$$

5. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 115)
Δίνεται τραπέζιο $AB\varGamma\varDelta$ με $\hat{A} = \hat{\varDelta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$. Αν $AB = 2a$ και $B\varGamma = a$, να υπολογίσετε συναρτήσει του a την διάμεσο EZ του τραπεζίου.

6. (Άσκηση 4/Αποδεικτικές/Σελίδα 115)
Σε ένα τραπέζιο $AB\varGamma\varDelta$ η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του $A\varDelta$ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεών του. Αν M είναι το μέσον της $B\varGamma$, να αποδείξετε ότι:
$$A\hat{M}\varDelta = 90^\circ$$

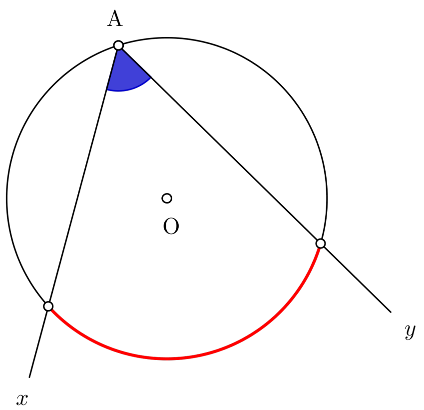
7. (Άσκηση 10/Αποδεικτικές/Σελίδα 115)
Αν A', B', $\varGamma'$, $\varDelta'$, K' είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου K παραλληλογράμμου $AB\varGamma\varDelta$ αντίστοιχα σε ευθεία (ε) που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι:
$$AA' + BB' + \varGamma\varGamma' + \varDelta\varDelta' = 4KK'$$

10 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

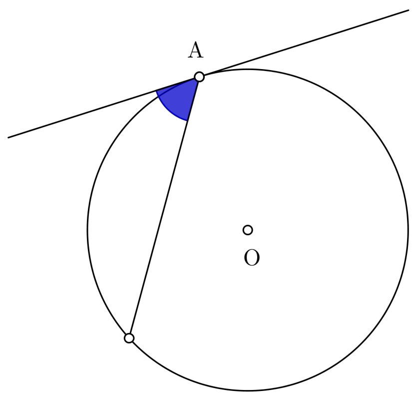
10.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Δίνεται μία κυρτή γωνία $x\hat{A}y$ και ένας κύκλος (O, ρ).

- Αν η κορυφή A της γωνίας είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο. Το τόξο που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της ή λέμε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο αυτό.

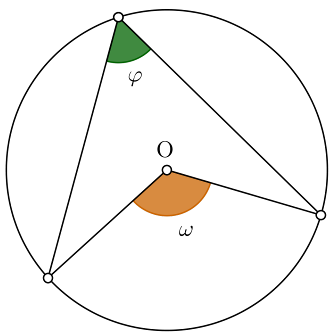


- Αν η κορυφή A της γωνίας είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα του κύκλου και η άλλη πλευρά της είναι εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.



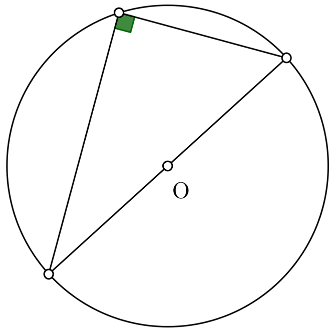
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

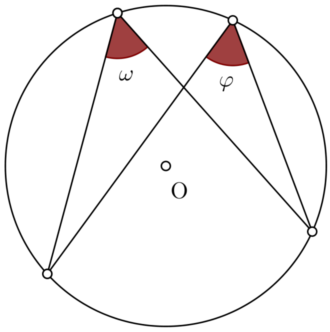


$\omega = 2\varphi$

2. Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
3. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

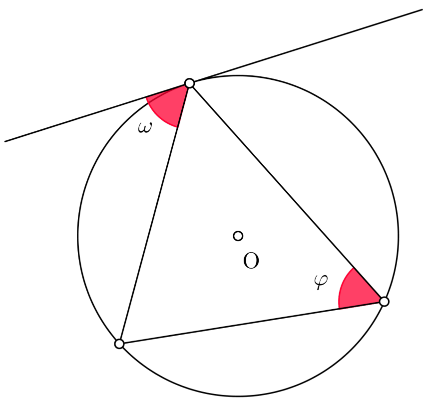


4. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα ενός κύκλου είναι ίσες και αντίστροφα.



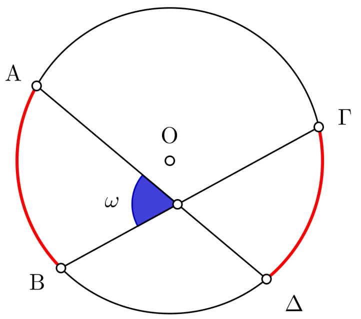
$\omega = \varphi$

5. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο της χορδής αυτής.

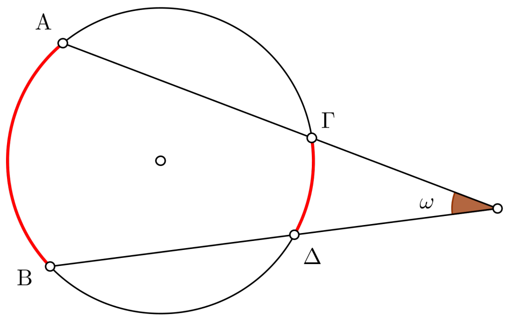


$\omega = \varphi$

6. Ισχύουν:



$$\omega = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2}$$



$$\omega = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 130)
Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία $\Gamma\Delta$ διέρχεται από το B.

2. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 130)
Δύο κάθετες χορδές AB, $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου κέντρου O τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος PM του τριγώνου $PB\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$.

3. (Άσκηση 1/Σύνθετες/Σελίδα 130)
Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A και δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) που διέρχονται από το A τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία B, B' και τον άλλον στα σημεία Γ, Γ'. Να αποδείξετε ότι $BB' \parallel \Gamma\Gamma'$.

4. (Άσκηση 2/Σύνθετες/Σελίδα 130)
Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A. Μία χορδή $B\Gamma$ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στον μικρότερο κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί την γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

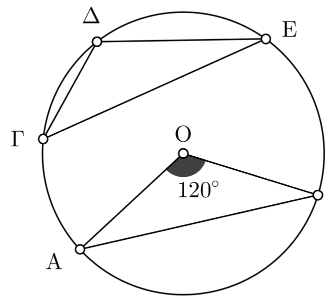
ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Σε κύκλο διαμέτρου AB θεωρούμε χορδή $A\Gamma$ ώστε $\Gamma\hat{A}B = 30°$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:
   (α΄) το τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ είναι ισοσκελές.
   (β΄) $AB = 2B\Delta$.

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισοσκελές.

7. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου AB και ένα εσωτερικό του σημείο Γ. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp AB$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου $(\Gamma, \Gamma\Delta)$ που άγονται από τα σημεία A και B είναι παράλληλες.

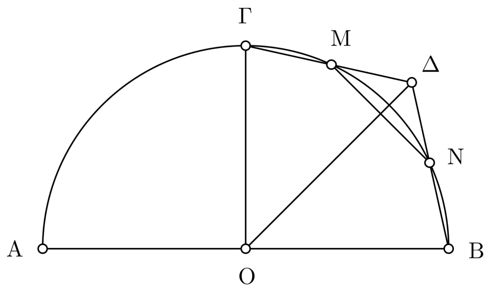
8. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο O, μία επίκεντρη γωνία του $A\hat{O}B = 120°$ και μία εγγεγραμμένη γωνία του $\varGamma\hat{\varDelta}E$ ίση με την $A\hat{O}B$.



Να αποδείξετε ότι:

$$AB = \varGamma E$$

9. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου AB και κέντρου O. Φέρνουμε την ακτίνα $O\varGamma \perp AB$ και παίρνουμε δύο σημεία M και N του τόξου $\overset{\frown}{B\varGamma}$ με $\varGamma M = BN$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι ευθείες $\varGamma M$ και BN τέμνονται στο σημείο $\varDelta$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $O\varDelta$ είναι μεσοκάθετος του MN.

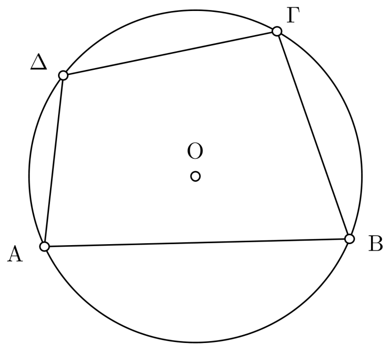
10. Οι κορυφές ενός τραπεζίου $AB\varGamma\varDelta$ με $AB \parallel \varGamma\varDelta$ είναι σημεία ενός κύκλου. Να αποδείξετε ότι η γωνία των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία A και $\varGamma$ είναι ίση με την γωνία των ευθειών $A\varDelta$ και $B\varGamma$.

11. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία B και $\varGamma$ τέμνονται στο σημείο $\varDelta$. Η παράλληλη από το $\varDelta$ προς την εφαπτομένη του κύκλου στο A τέμνει τις ευθείες AB και $A\varGamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $\varDelta$ είναι το μέσον του EZ.

12. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\varGamma}$ τριγώνου $AB\varGamma$ τέμνονται στο σημείο I και τέμνουν τον περιγεγραμμένο του κύκλο στα σημεία $\varDelta$ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varDelta E$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AI.

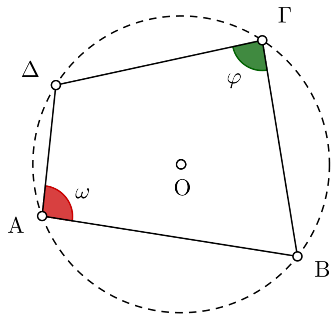
10.2 ΤΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τετραπλεύρου.



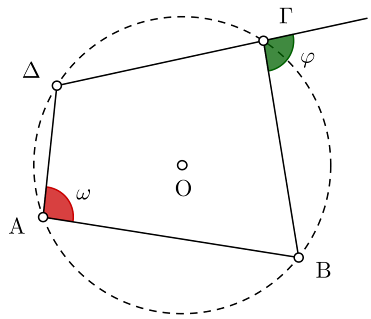
Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.
Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.



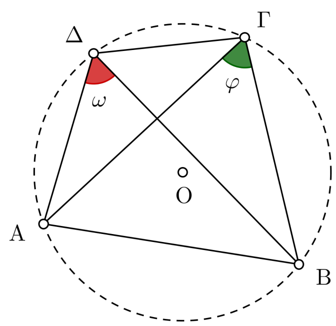
$\omega + \varphi = 180^\circ$

- Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.



$\omega = \varphi$

- Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες.



$\omega = \varphi$

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.
- Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

1. (Άσκηση 3/Εμπέδωσης/Σελίδα 134)
Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι ορθογώνιο.

2. (Άσκηση 2/Αποδεικτικές/Σελίδα 134)
Ένας κύκλος κέντρου O διέρχεται από τις κορυφές B και Γ τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ στο σημείο A.

3. (Άσκηση 3/Αποδεικτικές/Σελίδα 134)
Να αποδείξετε ότι τα ύψη $A\Delta$, BE, ΓZ τριγώνου $AB\Gamma$ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔEZ.

4. (Άσκηση 1/Σύνθετες/Σελίδα 134)(Θεώρημα $Nagel$)
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O, ρ). Αν $B\Delta$ και ΓE είναι ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OA \perp \Delta E$.

5. (Άσκηση 2/Σύνθετες/Σελίδα 134)
Δίνεται μία χορδή $B\Gamma$ ενός κύκλου (O, ρ) και οι εφαπτομένες του (ε_1) και (ε_2) στα άκρα της χορδής. Από ένα τυχαίο σημείο M της $B\Gamma$ φέρνουμε κάθετη στην OM που τέμνει τις (ε_1) και (ε_2) στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
$$\Delta M = ME$$

6. (Άσκηση 3/Σύνθετες/Σελίδα 134)
Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι συνευθειακά σημεία. (Ευθεία $Simson$).

ΑΛΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$. Από τυχαίο σημείο M του $A\Delta$ φέρνουμε τις αποστάσεις του ME και MZ από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε την διχοτόμο του $A\Delta$ και στο Δ φέρνουμε κάθετη στην υποτείνουσα $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι εγγράψιμο.

   (β′) $\Delta B = \Delta E$.

9. Δίνεται κύκλος διαμέτρου AB. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B και θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο της Γ. Από το μέσον Δ του $B\Gamma$ φέρνουμε την δεύτερη εφαπτομένη προς τον κύκλο και έστω E το σημείο επαφής της με τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, E, Γ είναι συνευθειακά.

10. Θεωρούμε το μέσον M ενός ημικυκλίου διαμέτρου AB. Έστω Λ τυχαίο σημείο του ημικυκλίου ανάμεσα στα σημεία A και M. Από το M φέρνουμε κάθετη στην ευθεία $A\Lambda$ που την τέμνει στο σημείο K. Οι ευθείες KM και AB τέμνονται στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:
    (α′) $K\Lambda = KM$.
    (β′) $A\hat{N}K = A\hat{M}\Lambda$.

11. Θεωρούμε έναν κύκλο, μία διάμετρό του AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $A\Delta$ εκατέρωθεν της διαμέτρου AB. Η εφαπτομένη του κύκλου στο B τέμνει τις ευθείες $A\Gamma$ και $A\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, E, Z είναι ομοκυκλικά.