Κεφάλαιο 1

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: Συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ ονομάζεται ένας κανόνας που αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο του συνόλου A **σε ένα μόνο** στοιχείο του συνόλου B.

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f.
- Το σύνολο B λέγεται **σύνολο άφιξης** της συνάρτησης f.
- Το σύνολο $f(A) = \{y \in B / y = f(x)$ για όλα τα $x \in A\}$ λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης f.

Για να βρουμε το πεδιο ορισμου μιας συναρτησης:

- Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει παρονομαστές, πρέπει κάθε μία από τις παραστάσεις στους παρονομαστές να είναι διάφορη του μηδενός.
- Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει παραστάσεις κάτω από ριζικά, τότε κάθε μία από τις παραστάσεις αυτές πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.
- Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει παραστάσεις μέσα σε λογαρίθμους, τότε κάθε μία από τις παραστάσεις αυτές πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.
- Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει παραστάσεις μέσα σε εφαπτομένες, τότε κάθε μία από τις παραστάσεις αυτές πρέπει να είναι διαφορετική από $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει παραστάσεις μέσα σε συνεφαπτομένες, τότε κάθε μία από τις παραστάσεις αυτές πρέπει να είναι διαφορετική από $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Αν στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει παράσταση της μορφής $(a(x))^{b(x)}$, τότε πρέπει $a(x) > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

   i) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{x}$ ii) $g(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt[3]{x-2}$ iii) $h(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

   iv) $d(x) = \varepsilon\varphi(2\pi - x)$ v) $\varphi(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ vi) $s(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x^2-2}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

   i) $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ ii) $g(x) = \dfrac{1}{\eta\mu x} - \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ iii) $h(x) = \dfrac{lnx}{\sqrt{x-1}}$

   iv) $p(x) = ln(lnx - 1)$ v) $\varphi(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$ vi) $s(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x} + \dfrac{\sqrt{x^3+2x^2-3}}{x^2-1}$

3. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

   i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

   ii Να αποδείξετε ότι για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f ισχύει: $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$

4. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = ln\left(x^2 + 2\lambda x + 9\right)$$

   να έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

5. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό m ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{mx^2 - 2mx + 3}}$$

   να έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ln\left(\frac{e^x+5}{e^x+1}\right)$$

   i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

   ii Να εξετάσετε αν ο αριθμός $ln2$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

1.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, το σύνολο των σημείων:

$$\{(x, f(x))/x \in A\}$$

ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f.

Παρατηρησεις:

- Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, υπολογίζουμε το $f(0)$, υπό την προϋπόθεση ότι το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης την εξίσωση: $f(x) = 0$.
- Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού A και g με πεδίο ορισμού B, λύνουμε μέσα στο σύνολο $A \cap B$ την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$
Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

2. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = x^2 - 2|x| - 3$$
Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{8x}}$$
Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = x^3 - x \text{ και } g(x) = x^2 - 1$$
Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

5. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;

6. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = ln\left(x^2 - 4\right)$$
Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

7. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3$$
Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy.

1.3 ΙΣΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δύο συναρτήσεις $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ίσες όταν:

έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$

Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε:

- Η συνάρτηση kf, $k \in \mathbb{R}$, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A και τύπο:

$$(kf)(x) = kf(x)$$

- Η συνάρτηση $f + g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B \neq \emptyset$ και τύπο:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B \neq \emptyset$ και τύπο:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

- Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B - \{x \in \mathbb{R}/g(x) = 0\} \neq \emptyset$ και τύπο:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να εξετάσετε αν είναι ίσες. Σε περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \text{ και } g(x) = \sqrt{x}+1$$

$$f(x) = \sqrt{1-6x+9x^2} \text{ και } g(x) = |3x-1|$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ και } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = ln\left(x^2-4\right) \text{ και } g(x) = ln(x-2) + ln(x+2)$$

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+3|x|} \text{ και } g(x) = 1 - \frac{3}{|x|}$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\left(f^2+g^2\right)(x) \leq 2(f+g)(x) - 2 \ , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f = g$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = \frac{x}{1-x}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις: $f+g \ , \ f \cdot g \ , \ \frac{f}{g} \ , \ \frac{g}{f}$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ και } g(x) = \sqrt{2+x-x^2}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις: $f \cdot g \ , \ \frac{g}{f}$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{2a^2x+a}{x+1-a} \text{ και } g(x) = \frac{(3a-1)x+a}{x+a}$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε οι παραπάνω συναρτήσεις να είναι ίσες.

1.4 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g και συμβολίζουμε $f \circ g$, μία συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:

$$\{x \in B / g(x) \in A\} \neq \emptyset$$

και για κάθε x μέσα στο παραπάνω σύνολο έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η σύνθεση συναρτήσεων δεν είναι αντιμεταθετική πράξη, δηλαδή για δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, γενικά ισχύει:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

- Η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για τρεις συναρτήσεις f, g, h και υπό την προϋπόθεση ότι οι συνθέσεις ορίζονται, ισχύει:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}$$
Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = \frac{2}{x-1} \text{ και } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = \sqrt{3-2x-x^2} \text{ και } g(x) = 2\eta\mu x - 1$$
Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = ln(x+1) \text{ και } g(x) = \sqrt{4-|x|}$$
Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = 2x+4 \text{ και } g(x) = \begin{cases} x-2 & , \quad x < -2 \\ x^2-1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$
Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

6. Θεωρούμε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

   i $f\left(x^2\right)$ ii $f(x-4)$ iii $f(lnx)$ iv $f(\eta\mu x)$

7. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,5)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:
$$h(x) = f\left(x^2-4\right) + f(x+1)$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = x^2+2x+2 \text{ και } g(x) = -x^2+2x$$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

9. Αν $g(x) = -x^2$, να βρείτε μία συνάρτηση f για την οποία να ισχύει:
$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$(f \circ g)(x) = x^2+2x+2 \text{ και } g(x) = x+1$$
να βρείτε την συνάρτηση f.

11. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$
Ορίζουμε $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$ και για κάθε θετικό ακέραιο n, $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n φορές}}$. Για ποιά τιμή του n η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $\left(3, \frac{3}{61}\right)$;

1.5 ΑΡΤΙΕΣ, ΠΕΡΙΤΤΕΣ, ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ, ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** όταν:

- για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$ και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(-x) = f(x)$.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **περιττή** όταν:

- για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$ και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(-x) = -f(x)$.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **περιοδική** με περίοδο T όταν:

- για κάθε $x \in A \Rightarrow x - T$ και $x + T \in A$ και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **φραγμένη** όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m_1 και m_2 για τους οποίους ισχύει:

$$m_1 \leq f(x) \leq m_2 \quad \text{, για κάθε } x \in A$$

Παρατηρησεις:

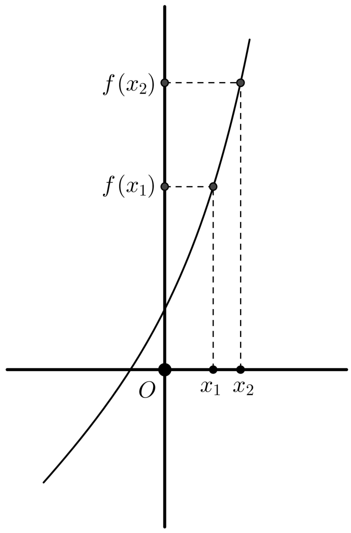
- Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
- Η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται ίδια σε μήκος μίας περιόδου.

1.6 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

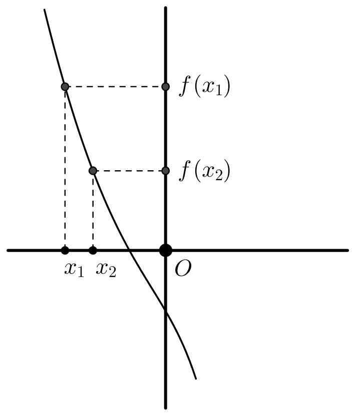
Σχήμα 1.1: Μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση



Ορισμός: Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Σχήμα 1.2: Μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

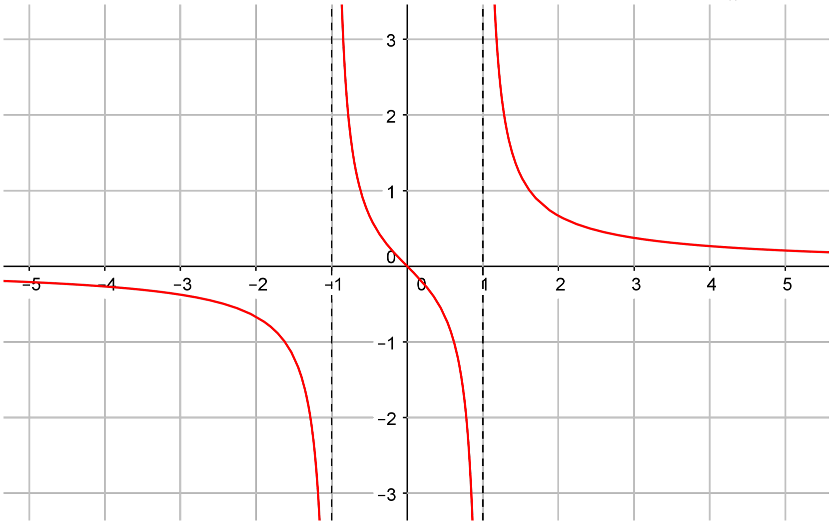
- Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** στο διάστημα Δ.
- Μπορούμε να ελέγξουμε την μονοτονία μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ χρησιμοποιώντας τον λόγο:

  $$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \ , \ \text{όπου } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 \neq x_2$$

  Ειδικότερα:
  αν $\lambda > 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.
  αν $\lambda < 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

- Η μονοτονία μίας συνάρτησης ελέγχεται πάντοτε σε διάστημα και **ποτέ** σε ένωση διαστημάτων, διότι μία συνάρτηση μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα Δ_1 και Δ_2 αλλά να μην είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο $\Delta_1 \cup \Delta_2$.
  Η συνάρτηση που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)\,, (-1, 1)$ και $(1, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωσή τους.

Σχήμα 1.3: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να ελέγξετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

   i $f(x) = -x^3 + 2$ ii $f(x) = \sqrt{2-x}$ iii $f(x) = ax + \beta\ ,\ a \neq 0$
   iv $f(x) = x^3 + x + 1$ v $f(x) = 2ln(x-2) + 1$ vi $f(x) = e^{x^3-1}$

2. Να ελέγξετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

   i $f(x) = 2x^2 - 1$ ii $f(x) = x^2 - 5x + 6$ iii $f(x) = \dfrac{x+2}{x-5}$
   iv $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+6}$ v $f(x) = ln|x|$

3. i Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες σε ένα διάστημα Δ με το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως μονότονη στο Δ με το ίδιο είδος μονοτονίας.

   ii Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:
   $$f(x) = e^x + \eta\mu x$$
   είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. i Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   ii Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ την συνάρτηση:
   $$f(x) = x^3\eta\mu x$$

5. i Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες σε ένα διάστημα Δ και ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ στο Δ, τότε:

   i. αν οι f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
   ii. αν οι f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

   ii Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:
   $$f(x) = -4\left(2x^3 + 7\right)^3 + 14$$

6. Έστω f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές και είναι γνησίως αύξουσες στο διάστημα αυτό.

   i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:
   $$h(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$$
   είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

   ii Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία στο διάστημα $(0, +\infty)$ την συνάρτηση:
   $$h(x) = \frac{x + e^x}{xe^x}$$

7. Έστω μία συνάρτηση f που είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:
   $$f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \leq f(xy)$$

8. Δίνεται μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:
   $$\frac{1}{f(x)} - f(x) + 1 = x^3 + x$$
   Να αποδείχετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

9. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
   $$f(x) = \frac{3e^x}{2 + f^2(x)}\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

i Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$f(x) > 0$$

ii Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii Να λύσετε την ανίσωση:
$$ln(f(x)) > 0$$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = g(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε:

i Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii Να λύσετε την ανίσωση:
$$f\left(g\left(x^2 + x\right)\right) < f(g(x + 2))$$

11. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:
$$2f^2\left(x^2\right) - 2xf(6x - 8) \leq 4 - 3x$$

1.7 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **ένα προς ένα** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **ένα προς ένα** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει: $x_1 = x_2$.

Παρατηρησεις:

- Αν μία συνάρτηση f είναι ένα προς ένα σε ένα σύνολο A, κάθε οριζόντια ευθεία θα τέμνει την γραφική της παράσταση **το πολύ μία φορά.** Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι κάθε εξίσωση της μορφής:

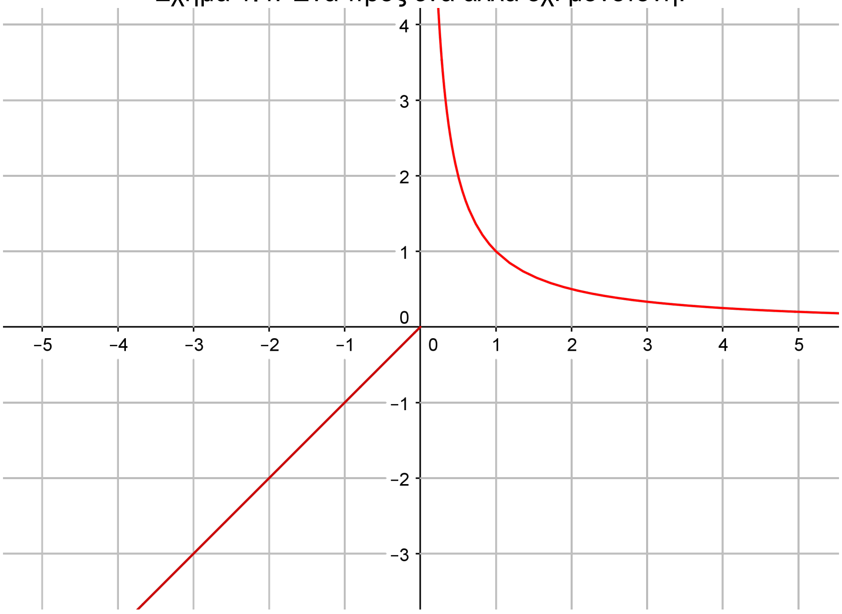
$$f(x) = k \ \ , \ \ k \in \mathbb{R}$$

  μπορεί να έχει **το πολύ μία ρίζα** στο σύνολο A.

- Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα προς ένα. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αν μία συνάρτηση είναι ένα προς ένα σε ένα διάστημα Δ, δεν είναι απαραίτητα και γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.
  Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα έχουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Σχήμα 1.4: Ένα προς ένα αλλά όχι μονότονη!



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα:

   i $f(x) = x^2 + 1$ ii $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ iii $f(x) = ln\left(1+x^2\right)$

   iv $f(x) = x^3 + 1$ v $f(x) = e^{2x+1}$ vi $f(x) = \eta\mu 2x$

2. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

   i Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

   ii Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2x^3 + x\right) = f(4 - x)$$

3. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

   i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(x^2 - x + 1\right) = f^2(x) - f(x) + 1$$

   ii Να υπολογίσετε το $f(1)$.

   iii Θεωρούμε μία συνάρτηση g με:

$$g(x) = x^2 - xf(x) + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

   Να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι ένα προς ένα.

4. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και ισχύει:

$$(g \circ g)(x) = ag(x) + f\left(x^3\right) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

   όπου $a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g είναι ένα προς ένα.

5. i Αν για τις συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και είναι ένα προς ένα στο πεδίο ορισμού της, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα στο σύνολο A.

   ii Με την βοήθεια των συναρτήσεων:

$$g(x) = x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x \geq 0$$

   να δείξετε ότι αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος, δεν είναι αναγκαίο να είναι η συνάρτηση g ένα προς ένα στο σύνολο B.

6. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = 3^x + x - 11$$

   i Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

   ii Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^x + x = 11$$

7. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = 2x - 2 + lnx$$

   i Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

   ii Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

   iii Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) > 0$$

8. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{3}\right)^x$$

i Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x\right)=3$$

iii Να λύσετε την ανίσωση:

$$3^{x^2}\cdot 4^{x+2}-4^{x^2}\cdot 3^{x+2}<5^{x^2}\cdot 3^{x+2}-3^{x^2}\cdot 5^{x+2}$$

9. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x}-lnx\ \ ,\ \ x>0$$

i Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την εξίσωση:

$$xlnx+x=1$$

10. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$f\left(x-4\right)+f\left(2x-1\right)=0\ \ ,\ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x\right)=0$$

ii Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x^2-5x-1\right)<0$$

iii Αν ισχύει $f\left(-10\right)=-7$, να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(x\right)\right)>0$$

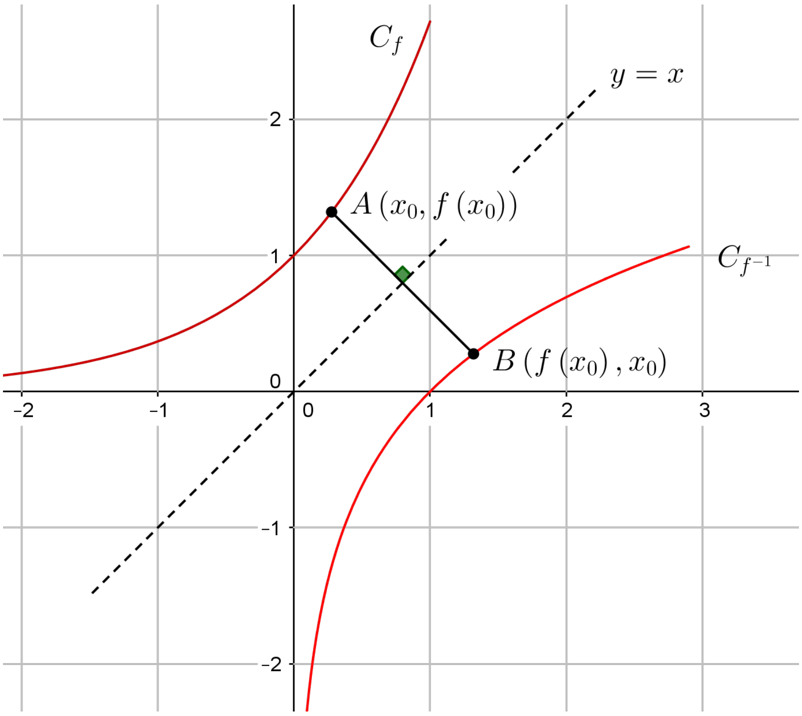
1.8 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και σύνολο τιμών το $B = f(A)$ η οποία είναι ένα προς ένα στο A. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο B και σύνολο τιμών το A, η οποία θα αντιστοιχίζει σε κάθε $y \in B$ το μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **αντίστροφη** της f και συμβολίζεται f^{-1}.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Ισχύει η ισοδυναμία:
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$
- Ισχύουν:
$$f^{-1}(f(x)) = x \ , \ \text{για κάθε } \ x \in A$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \ , \ \text{για κάθε } \ y \in f(A)$$
- Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

Σχήμα 1.5: Τα σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (*Βασικό θέμα*)

   Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε και η αντίστροφή της f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο $f(\Delta)$ με το ίδιο είδος μονοτονίας.

2. (*Βασικό θέμα*)

   Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν κοινά σημεία, τότε αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$. Δηλαδή, με άλλα λόγια, αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει η ισοδυναμία:

   $$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

3. Να βρείτε την αντίστροφη των παρακάτω συναρτήσεων:

   i $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ ii $f(x) = ln(x+2) - 1$ iii $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}} + 2$

4. Να βρείτε την αντίστροφη των παρακάτω συναρτήσεων:

   i $f(x) = \dfrac{2x}{x-6}$ ii $f(x) = 1 + e^{-x}$ iii $f(x) = \sqrt{5+\sqrt{6-x}}$

5. Να βρείτε την αντίστροφη των παρακάτω συναρτήσεων:

   i $f(x) = ln(1+e^x)$ ii $f(x) = 1 - x^3$ iii $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

6. Θεωρούμε την συνάρτηση:

   $$f(x) = \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$$

   Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ, δ με $\gamma \neq 0$, ώστε η συνάρτηση f να έχει αντίστροφη τον εαυτό της.

7. Θεωρούμε την συνάρτηση:

   $$f(x) = 2x + e^x \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

   i Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

   ii Θεωρείστε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$. Υπολογίστε τις τιμές:

   $$f^{-1}(1) \ \ , \ \ f^{-1}(2+e) \ \ , \ \ f^{-1}(3+ln9)$$

8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

   $$f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = \sigma\upsilon\nu x \ \ , \ \ x \in [0, \pi]$$

   i Να αποδείξετε ότι η μία συνάρτηση αντιστρέφεται ενώ η άλλη δεν αντιστρέφεται.

   ii Αν οι f και g περιοριστούν στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}\left(g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

9. Θεωρούμε την συνάρτηση:

   $$f(x) = e^{-x} - x \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

   i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

   ii Να λύσετε την εξίσωση:

   $$f^{-1}(x) = 1 - x$$

   iii Να λύσετε την ανίσωση:

   $$f^{-1}(x) \leq 1 - x$$

10. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι γνησίως μονότονη και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.

    i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

    ii Να υπολογίσετε τις τιμές:

    $$f^{-1}(2) \text{ και } f^{-1}(9)$$

iii Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2+f^{-1}\left(x^2+x\right)\right)=9$$

iv Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left(x^2-8x\right)-2\right)<2$$

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=x^3+x+2 \ \ , \ \ x\in\mathbb{R}$$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}\left(4\right)$.

iii Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f\left(x\right)=12 \ \text{ και } \ f^{-1}\left(x\right)=-2$$

iv Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και με την ευθεία $y=x$.

v Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(2-\eta\mu^2x\right)^3=\eta\mu^3x+\eta\mu^2x+\eta\mu x-2$$

vi Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(x\right)<3$$

12. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)}+f\left(x\right)=x \ \ , \ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i Να δείξετε ότι f η αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ii Να υπολογίσετε τις τιμές:

$$f\left(1\right) \ \text{ και } \ f\left(2+ln2\right)$$

iii Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x-4}-e^{2x+1}=x+5$$

13. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$f\left(f\left(x\right)\right)+x=0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

ii Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}\left(x\right)=-f\left(x\right) \ \ , \ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

iii Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

iv Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

14. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x+f\left(x\right) \ \ , \ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

ii $f\left(0\right)=0$.

iii Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$f\left(f\left(x\right)-x\right)=x \ \ , \ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

15. Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επιπλέον ισχύουν:

- $f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$, για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$
- $f\left(1\right)=0$
- $f\left(x\right)\neq 0$, για κάθε $x\neq 1$

Να αποδείξετε ότι:

i $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$, για κάθε $x>0$

ii Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

iii $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

16. Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επιπλέον ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii Η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii $f(x-y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

iv Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 0$, τότε:

i. Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

ii. $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f \circ f + g \circ f = I \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου I είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με:

$$f^{-1} = f + g$$

18. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x - 32$$

Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Κεφάλαιο 2

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.1 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

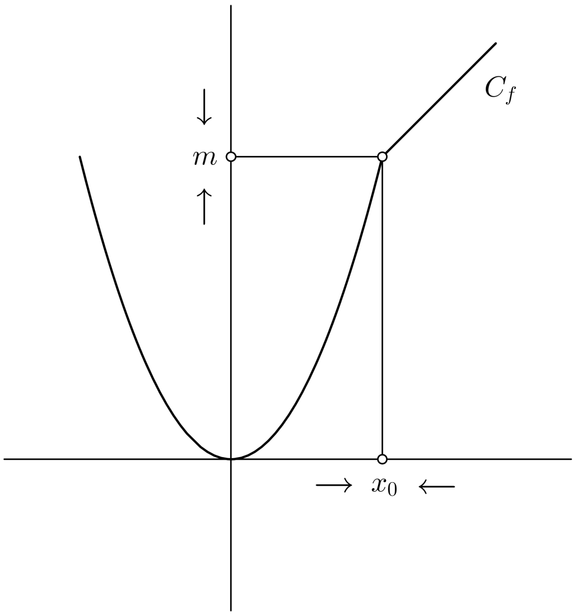
Ορισμός: Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε μία περιοχή $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν στο πεδίο ορισμού της f υπάρχει σύνολο της μορφής $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, όπου ο δ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρός θετικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμός: Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει μία ιδιότητα σε μία περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν η συνάρτηση f έχει την ιδιότητα αυτή σε σύνολο της μορφής $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, όπου ο δ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρός θετικός πραγματικός αριθμός.

Στο σχήμα που ακολουθεί παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε τον πραγματικό αριθμό x_0 είτε από αριστερά είτε από δεξιά, οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό $m.$ Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με $m.$ Θα συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = m$$

Σχήμα 2.1: Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με m



Στο σχήμα που ακολουθεί παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε τον πραγματικό αριθμό x_0 από αριστερά, οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f από αριστερά καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με m_1 και γράφουμε:

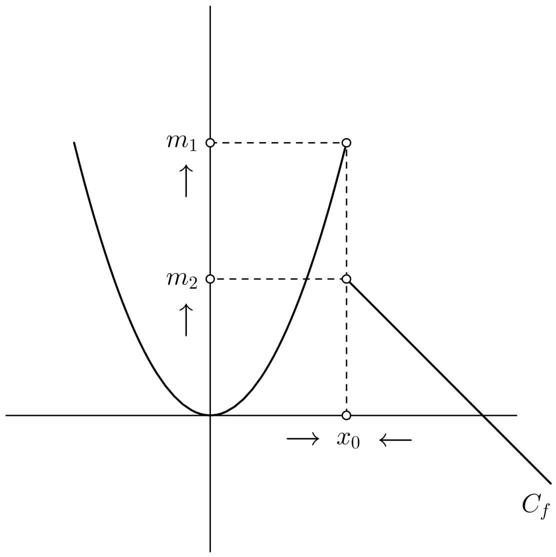
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m_1$$

Όταν όμως πλησιάζουμε τον πραγματικό αριθμό x_0 από δεξιά, οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m_2. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f από δεξιά καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με m_2 και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = m_2$$

Επειδή $m_1 \neq m_2$, η συνάρτηση f δεν έχει όριο στο x_0.

Σχήμα 2.2: Τα πλευρικά όρια της f είναι διαφορετικά και δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = m$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - m) = 0$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = m$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Όριο και πράξεις)

Έστω δύο συναρτήσεις f και g με:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = m_1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m_2$$

Τότε ισχύουν:

1. $\lim_{x \to x_0} kf(x) = km_1$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = m_1 + m_2$
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = m_1 \cdot m_2$
4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{m_1}{m_2}$, αν $m_2 \neq 0$
5. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |m_1|$
6. $\lim_{x \to x_0} f^n(x) = m_1^n$, όπου n θετικός ακέραιος, $n > 1$.
7. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{m_1}$, όπου n θετικός ακέραιος, $n > 1$, και $f(x) \geq 0$ σε μία περιοχή του x_0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Το όριο του αθροίσματος, του γινομένου κλπ δύο συναρτήσεων μπορεί να υπάρχει σε ένα σημείο x_0, χωρίς να υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων στο x_0.

- Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{x\to x_0} c = c \ , \ \text{όπου} \ c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$

- Έστω το πολυώνυμο:

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ , \ n \ \text{θετικός ακέραιος}$$

  Τότε:

$$\lim_{x\to x_0} P\left(x\right) = P\left(x_0\right)$$

- Έστω δύο πολυώνυμα $P\left(x\right)$ και $Q\left(x\right)$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)} = \frac{P\left(x_0\right)}{Q\left(x_0\right)} \ , \ \text{αν} \ Q\left(x_0\right) \neq 0$$

Όριο συνθετης συναρτησης:

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to x_0} f\left(g\left(x\right)\right)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Θέτουμε $u = g\left(x\right)$.
- Υπολογίζουμε αν υπάρχει το $u_0 = \lim_{x\to x_0} g\left(x\right)$.
- Υπολογίζουμε αν υπάρχει το $m = \lim_{u\to u_0} f\left(u\right)$.

Αν ισχύει $g\left(x\right) \neq u_0$ σε μία περιοχή του x_0, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g\left(x\right)\right) = m$$

Όριο και τριγωνομετρικες συναρτησεις:

Ισχύουν τα παρακάτω:

- $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$.
- $\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $\lim_{x\to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \left\{k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- **Δύο βασικά όρια:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Όριο και εκθετικες-λογαριθμικες συναρτησεις:

Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $0 < a \neq 1$.
- $\lim_{x\to x_0} lnx = lnx_0$, για κάθε $x_0 > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left|x^4-x-2\right|}{1-x}$

   iii) $\lim\limits_{x\to e}(lnx+1)^2$ iv) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-x+1}$

   v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-1|}{x^2+1}$

2. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x)=\begin{cases} -2x & , \quad x<-1 \\ 1+x^2 & , \quad x\geq -1 \end{cases}$$
   Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & , \quad x\leq 1 \\ \lambda x^2+\lambda x+7 & , \quad x>1 \end{cases}$$
   Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η συνάρτηση να έχει όριο στο σημείο $x_0=1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x)=\begin{cases} x^3-2ax-\beta & , \quad x\leq -1 \\ x^2-15 & , \quad -1<x\leq 2 \\ -ax-\beta & , \quad x>2 \end{cases}$$
   Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η συνάρτηση να έχει όριο στα σημεία $x_0=-1$ και $x_1=2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x)=\begin{cases} \beta+2\sqrt{x^2+1} & , \quad x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+2} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$
   Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η συνάρτηση να έχει όριο στο σημείο $x_0=0$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $M\left(-\sqrt{3},1\right)$.

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

   iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{-x^2+8x-7}$ iv) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$

   v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-3x+2}$

7. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+3x)(1+5x)-1}{x}$

   iii) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+1}{x+4}+\dfrac{x^2+2x}{x+2}\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$

   v) vi)

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$

   iii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

   v) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x+5}-2}$ vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$

ii) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7}$

iii) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^3-5x^2-28x+32}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}-\sqrt{x^2+24}}{x^2-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{2x^2+8}}{x^2-5x+6}$

vi)

10. Να εξετάσετε αν για την συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1} & , \quad x<1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & , \quad x>1\end{cases}$$

υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

11. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-4|-|x-2|}{2(x^3-9x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^2-x\right|-|x-1|}{x-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left|x^2-4\right|-x^2+|-3x+10|}{-x^3+4x}$

vi) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|+|x+5|-3}{x^2+2x}$

12. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|-|x+2|}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+|x-3|-5}{|x|-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\left|x^2-5x+6\right|}{x-3}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left|\sqrt{x^2+5}-\sqrt{11-x}\right|}{x^2-4}$

13. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{3x+4}-2}$

14. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\eta\mu x}-1}{x^2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\eta\mu^2 x+\eta\mu x-1}{2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x+\eta\mu 5x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^3}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-|\sigma\upsilon\nu x|}{\sqrt{x+1}-1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

15. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7}-3}$

iv) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\eta\mu x}{(\pi-2x)^2}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}}{x-1}$

vi) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6}$

16. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{2-\sqrt{5-x^2}}$

iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\eta\mu x}}$ iv) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\sqrt{x-1}-2x-5\sqrt{x-1}+10}{x^3-8x^2+5x+50}$

17. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 0. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$, αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(2f\left(x\right)+x^2-6x-1\right)=2$$

18. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$, αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)}{x-1}=1$$

19. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$, αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf\left(x\right)+4-2f\left(x\right)-x^2}{\sqrt{x+2}-2}=3$$

20. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζετε στο σύνολο $A=\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$. Αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)+\eta\mu\left(\dfrac{\pi\left(x-1\right)}{2}\right)-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\pi}{2}$$

να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-1}{x-1}$$

21. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 2. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x\to 2}\left(xf\left(x\right)-3g\left(x\right)\right)=3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}\left(f\left(x\right)+2xg\left(x\right)\right)=-1$$

να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 2} f\left(x\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2} g\left(x\right)$$

22. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 0. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g\left(x\right)\eta\mu x-xf\left(x\right)}{2x}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{g\left(x\right)\eta\mu x+xf\left(x\right)}{2x}=\frac{1}{2}$$

να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g\left(x\right)$$

23. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 2. Αν ισχύουν:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)}{x-2}=5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}\left(g\left(x\right)\left(2x^2+x-10\right)\right)=3$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)$$

24. Έστω μία περιττή συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται απ'ο το σημείο $A\left(1,2\right)$. Αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)+f\left(-1\right)}{x-2}=4$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2f\left(x\right)-8}{x^2-4}$$

25. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 1$$

   i Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

   ii Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x + f(x)}{2x + \eta\mu x} = \frac{5}{3}$$

26. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 0 και για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(f(x) + \frac{\eta\mu 5x}{x} \right) = 6 \text{ και } \lim_{x\to 0^-} \left(g(x) - \sigma\upsilon\nu x \right) = 1$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} a^2 g(x) & , \quad x < 0 \\ af(x) + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x\to 0} h(x)$.

27. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 0 και είναι θετική στην περιοχή αυτή. Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \eta\mu x - 1}{x} = 2$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{\sqrt{f(x)} - \sigma\upsilon\nu x}$$

28. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3 για το οποίο ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} \frac{P(x)}{|x - 1|} = k \;\; , \;\; k \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

   i $P(1) = 0$.

   ii $k = 0$.

   iii Το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{P(x)}{(x - 1)^2}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

2.2 ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Πρόταση 1: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ σε μία περιοχή του x_0.

Πρόταση 2: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ σε μία περιοχή του x_0.

Πρόταση 3: Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 και σε μία περιοχή του x_0 ισχύει ότι $f(x) \leq g(x)$, τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Πρόταση 4 (το κριτήριο παρεμβολής): Έστω οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύουν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, σε μία περιοχή του x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$

τότε θα ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = m$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για μία συνάρτηση f ισχύει:

$$2x-5x^2 \leq f(x) \leq 2x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

2. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο σύνολο $A=(1,2)\cup(2,3)$. Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{(x-2)^2}}{2+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο διάστημα $\Delta=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x \leq f(x) \leq x^2$$

να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

4. Για μία συνάρτηση f ισχύει:

$$\left|f(x)-x^2\right| \leq |x| \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

5. Έστω μία συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left|\eta\mu x\cdot f(x)-x\sqrt{|x|}\right| \leq \eta\mu^2 x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

6. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|x\cdot\eta\mu x\cdot f(x)| \leq \sqrt{x^4+1}-1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

7. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|xf(x)-|\eta\mu x|| \leq x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

8. i Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)|=0$$

ii Με την βοήθεια της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x>0 \end{cases}$$

να αποδείξετε ότι αν το όριο δεν είναι μηδέν, η παραπάνω ισοδυναμία δεν ισχύει. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι το $\lim_{x\to 0}|f(x)|$ υπάρχει αλλά το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει!

iii Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f^2(x)=0$$

iv Για μία συνάρτηση f ισχύει:

$$f^2(x) \leq 2f(x) - \sigma\upsilon\nu^2 x \ , \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

9. i Αν για δύο συναρτήσεις f και g ισχύει:

$$|f(x)| \leq |g(x)| \ , \ \text{σε μία περιοχή του } x_0$$

και επιπλέον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

ii Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

10. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

11. i Σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

- $f(x) \geq 0$
- $g(x) \geq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = 0$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

ii Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right) = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

iii Αν σε μία περιοχή του 0 ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)+2f(x)-4g(x)+5 \leq \sqrt{|x|}$$

να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0} g(x)$$

12. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x) = 1 \ , \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

i $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot f(x)\cdot g(x)) = 0$

13. Για τις συναρτήσεις f και g σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

- $f(x)+g(x) \neq 0$
- $f(x)g(x) > 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

να αποδείξετε ότι:

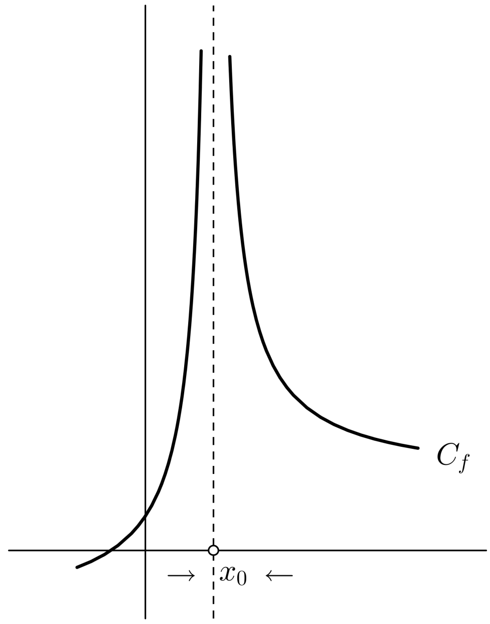
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{f(x)+g(x)} = 0$$

2.3 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι όσο οι τιμές του x πλησιάζουν τον πραγματικό αρθμό x_0 τόσο οι τιμές της συνάρτησης f μεγαλώνουν απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

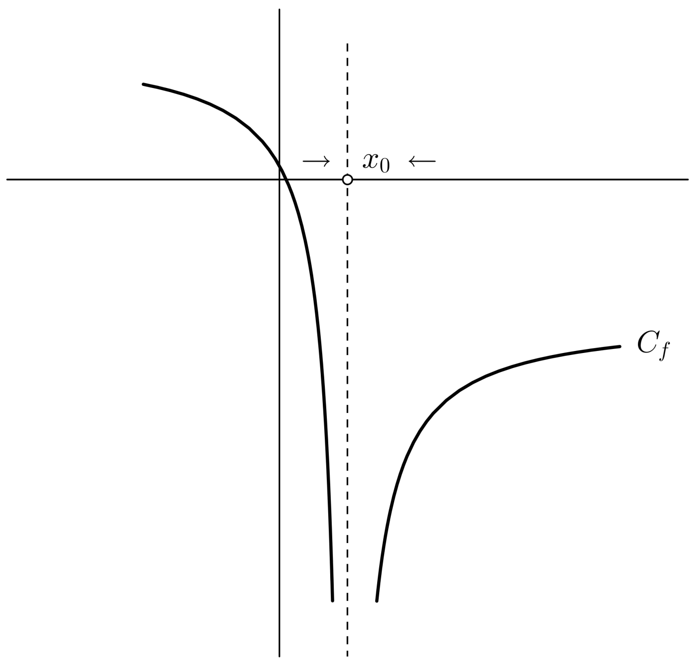
Σχήμα 2.3: Το όριο της συνάρτησης στο x_0 ισούται με $+\infty$



Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι όσο οι τιμές του x πλησιάζουν τον πραγματικό αρθμό x_0 τόσο οι τιμές της συνάρτησης f μικραίνουν απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Σχήμα 2.4: Το όριο της συνάρτησης στο x_0 ισούται με $-\infty$



Για τα μη πεπερασμένα όρια ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = \mp\infty$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{|f(x)|} = +\infty$ για κάθε θετικό ακέραιο n, $n > 1$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ σε μία περιοχή του x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
  Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ σε μία περιοχή του x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία ισχύει $f(x) > 0$.
  Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία ισχύει $f(x) < 0$.
- Για να κάνουμε χρήση του Θεωρήματος όριο και πράξεις ακολουθούμε τον παρακάτω πίνακα:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) =$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) =$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$m \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & , \text{ αν } m > 0 \\ -\infty & , \text{ αν } m < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$m \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & , \text{ αν } m > 0 \\ +\infty & , \text{ αν } m < 0 \end{cases}$

- Απροσδιόριστες μορφές στον υπολογισμό ορίων είναι οι παρακάτω:
  $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 0^0, $(+\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+3x+2}{(x+1)^2}$

   ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-9}{|x+1|}$

   iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+4}{x^2+x-2}$

   iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)^2}$

   v) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+2|+6x-1}{-x^2+1}$

   vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$

   vii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

   viii) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2}{|x+5|(x^2-25)}$

   ix) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$

   x) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-10x+16}$

   xi) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-4x^2+4x}$

   xii) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}}{x^3}$

   xiii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\varepsilon\varphi x$

2. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$$

   Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{|3-xf(x)|-|2f(x)-3|}$$

3. Έστω μία περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

   Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

4. Μία συνάρτηση f ορίζεται σε μία περιοχή του 3 και ισχύει:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$$

   Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3f^2(x)+2f(x)+1}{f^2(x)-f(x)+3}$$

5. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+\beta-1}{x-1} & , \quad x<1\\[2ex] \dfrac{x^3-1}{x-1} & , \quad x>1\end{cases}$$

   Να βρείτε τους πραγματικούς a και β ώστε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

6. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\kappa x+\lambda-2}{x-2} & , \quad x<2\\[2ex] \dfrac{x^3-8}{x-2} & , \quad x>2\end{cases}$$

   Να βρείτε τους πραγματικούς κ και λ ώστε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

7. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + ax + \beta}{x - 2} & , \quad x < 2 \\ x^2 - (a + \gamma)x + 3 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τους πραγματικούς a, β, γ αν γνωρίζετε ότι το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 18)$.

8. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

9. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2 + (a + 3)x - 12}{x^2 - 4}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|x - a| - |x + a|}{x^3} \quad , \quad \text{όπου } a > 0$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

11. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4a^2} - 2a}{|x + a| - a}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

12. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 4}{||x| - 2|} \quad , \quad \text{όπου } a > 0$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

13. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\lambda^2 - 2\sqrt{2x}}{x^2 - 4x + 4}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

14. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{a\left|x^2 - 5x + 4\right| + \beta|x - 3| - 10}{x^2 - 3x + 2} \quad , \quad \text{όπου } a > 0$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

15. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{a\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

και να υπολογίσετε την τιμή του b.

16. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 4}{f(x)} = +\infty$$

17. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν γνωρίζετε ότι:
$$\lim_{x\to 1}\left(f(x)\left(3x^2-2\right)\right)=+\infty$$
18. Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε περιοχή του 0. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν γνωρίζετε ότι:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\,\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$$
19. Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, αν γνωρίζετε ότι:
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)\left(x^2-3x\right)}{x-2}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{g(x)(x-3)}=-\infty$$
20. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\lim_{x\to -2}\left(|x+2|\,f(x)\right)=-3$$
Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f^2(x)+2f(x)-5}{f(x)+7}$

iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2013f(x)}{f^2(x)-3f(x)+13}$

21. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\lim_{x\to 2}\left(\left(x^2-4x+4\right)f(x)\right)=-4$$
Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(xf(x)-2f(x)\right)\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\right]$

22. Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:
$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\,\eta\mu^2(\pi x)}{(x+a)^2}=+\infty \quad , \quad \text{όπου } a\in\mathbb{R}$$
Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

23. (*Βασικό θέμα*)

i Να αποδείξετε ότι, αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:
$$f(x)\le g(x) \quad , \quad \text{σε μία περιοχή του } x_0$$
και επιπλέον $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

ii Να αποδείξετε ότι, αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:
$$f(x)\le g(x) \quad , \quad \text{σε μία περιοχή του } x_0$$
και επιπλέον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

24. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$x^2f(x)\ge x+3 \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-2013\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right]$

25. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$
να αποδείξετε ότι:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{f^4(x)+g^4(x)}=+\infty$$

2.4 ΟΡΙΟ ΟΤΑΝ $x \to \pm\infty$

Ορισμός: Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε περιοχή του $+\infty$ όταν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

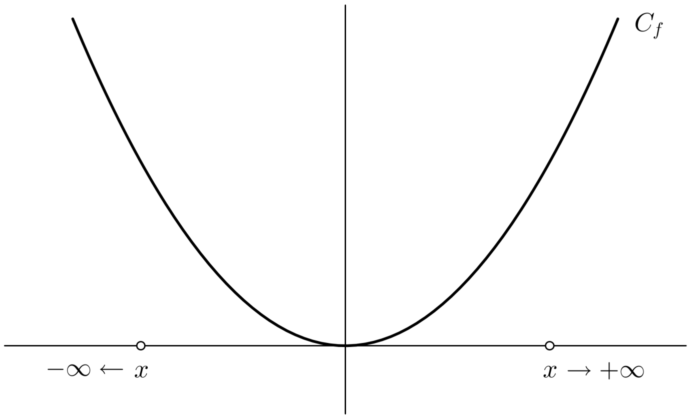
Ορισμός: Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε περιοχή του $-\infty$ όταν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι όσο το x μεγαλώνει (δηλαδή $x \to +\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f μεγαλώνουν συνεχώς. Επίσης όσο το x μικραίνει (δηλαδή $x \to -\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f επίσης μεγαλώνουν συνεχώς. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Σχήμα 2.5: Όταν $x \to \pm\infty$ το όριο της f είναι ίσο με $+\infty$

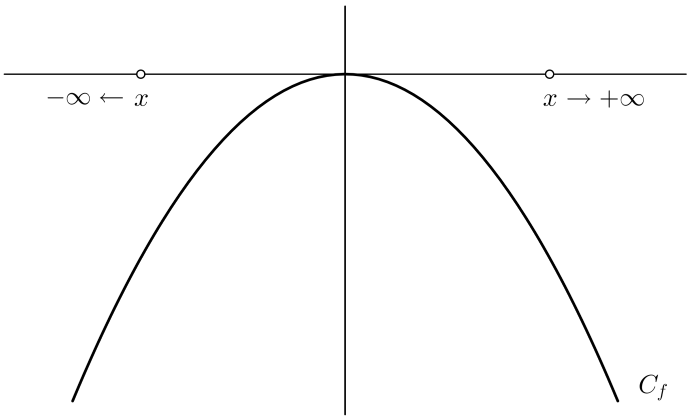


Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι όσο το x μεγαλώνει (δηλαδή $x \to +\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f μικραίνουν συνεχώς. Επίσης όσο το x μικραίνει (δηλαδή $x \to -\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f επίσης μικραίνουν συνεχώς. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Σχήμα 2.6: Όταν $x \to \pm\infty$ το όριο της f είναι ίσο με $-\infty$

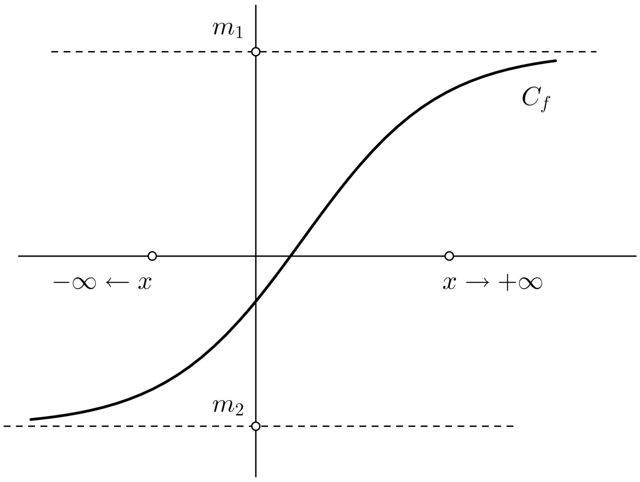


Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι όσο το x μεγαλώνει (δηλαδή $x \to +\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m_1. Επίσης όσο το x μικραίνει (δηλαδή $x \to -\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m_2. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = m_1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m_2$$

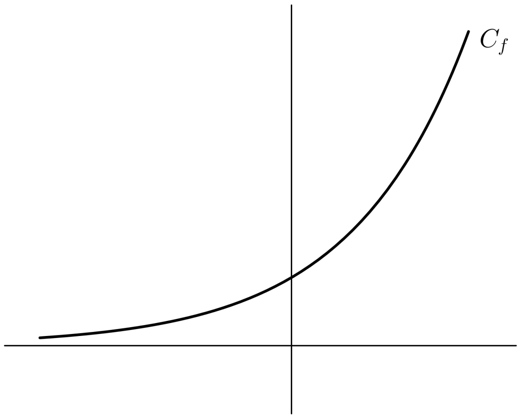
Σχήμα 2.7: Όταν $x \to \pm\infty$ το όριο της f είναι πραγματικός αριθμός



Για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, όπου $0 < a \neq 1$, έχουμε:

Αν $a > 1$:

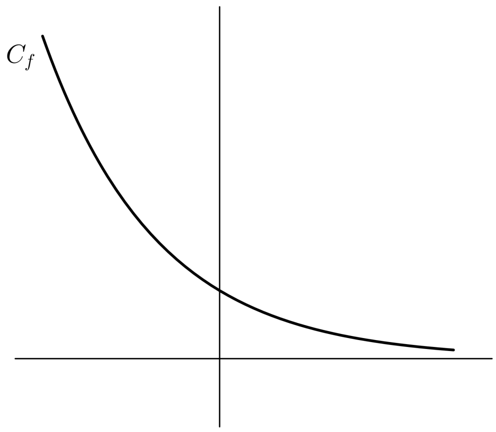
Σχήμα 2.8: Η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης για $a > 1$



$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

Αν $0 < a < 1$:

Σχήμα 2.9: Η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης για $0 < a < 1$

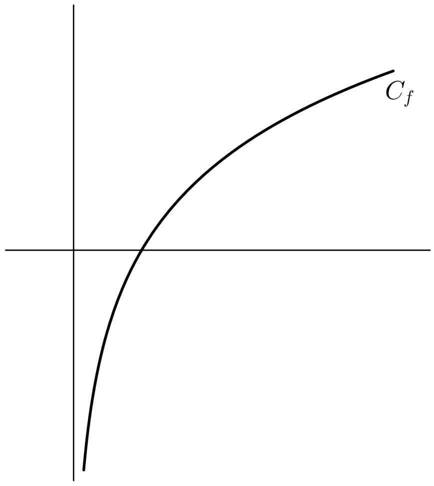


$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

Για την λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = a^x$, όπου $0 < a \neq 1$, έχουμε:

Αν $a > 1$:

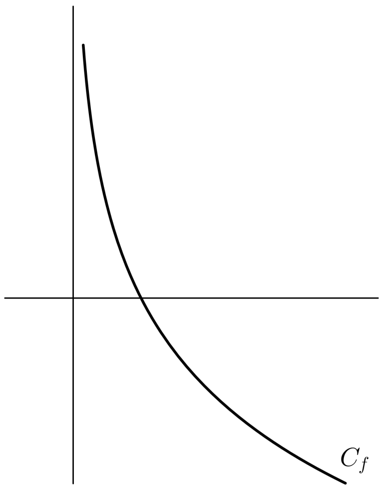
Σχήμα 2.10: Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης για $a > 1$



$$\lim_{x \to 0^+} log_a x = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty$$

Αν $0 < a < 1$:

Σχήμα 2.11: Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης για $0 < a < 1$



$$\lim_{x \to 0^+} log_a x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = -\infty$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5+x^3-2\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3+5x+7\right)$

   iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{-2x^2-x+5}$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-8x^5+x+2}{-x^2+5}$

   v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+9}{x^4-7x^2+8}$ vi) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2+2x-5}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+x+1}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2-2x+5}\right)$

   iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1+\sqrt{x^2+x+1}}{3x^2+x+2}$

   v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{2x^3-3}\right)$

   vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ viii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(|x|-x\right)\sqrt{x^2-4x+3}\right]$

   ix) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\left|x^2-3x\right|}{|x-2|+x^2}$ x) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|x^4+6x^3-5x+6\right|-x^4}{|4x^3+2x^2-3x|+x^3}$

   xi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^2-5x+13\right|-7x^2}{|x^3-3x^2+5|-x^3}$ xii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   xiii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$

   iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

   v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+5}}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+1}-x\right)$

   vii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ viii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+2x+3}+2x\right)$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}-3^{x+2}}{2^x-3^x}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-4^x}{2\cdot 3^x+4^x}$

   iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x-1}+3^{x+2}}{3^{x+1}-e^x}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3^x+4^x}{2^x+3^{x+2}-4^{x-1}}$

   v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln^2x+1}{ln^2x-lnx+1}$

5. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$$

   i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

   ii Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)$$

6. Να υπολογίσετε το όριο:

$$I=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\lambda^2-3\lambda\right)x^4+4\lambda x^3+\left(\lambda-5\right)x^2+7x-6\right]$$

   για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

7. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to-\infty} \frac{(a+1)\,x^3 + x + 2}{(a-2)\,x^2 + 1}$$
για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

8. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-1)\,x^2 - x + 2}{(a+2)\,x^3 + ax^2 + 1}$$
για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

9. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\lambda^2 - 4\right) x^4 + (\lambda - 2)\,x^3 + \lambda x + 3}{\left(\lambda^2 + 2\lambda\right) x^3 + (1-\lambda)\,x^2 + x - 2}$$
για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

10. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} - ax - \beta \right)$$
για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a και β.

11. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x \right)$$
για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

12. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε να ισχύει:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - ax + \beta \right) = 2$$

13. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε να ισχύει:
$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 12x - 1} + ax + \beta \right) = 7$$

14. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \eta\mu\omega \cdot x - \sigma\upsilon\nu\varphi \;\;,\;\; \text{όπου } \omega, \varphi \in (0, \pi)\,.$$
Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των ω και φ έτσι ώστε να ισχύει: i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ii

15. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to-\infty} \frac{a^x - 2^{x+1}}{2a^x + 2^x}$$
για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a.

16. Να υπολογίσετε το όριο:
$$I = \lim_{x\to-\infty} \left[ln\left(\frac{a^{2x} + e^{2x}}{e^x} \right) - x \right]$$
για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a.

17. Να βρείτε ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3 \;\text{ και }\; \lim_{x\to1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$$

18. Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Έστω ακόμη ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύουν:
$$P(0) = -4 \;\;,\;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x+a} = 2 \;\text{ και }\; \lim_{x\to2} \frac{P(x)}{x+a} = \beta$$
Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ και τους πραγματικούς αριθμούς a και β.

19. Έστω μία συνάρτηση f που ορίζεται στο $(0, +\infty)$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, αν γνωρίζετε ότι:
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right] = -2$$

20. Έστω μία συνάρτηση f που ορίζεται στο $(0, +\infty)$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, αν γνωρίζετε ότι:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+1}+3f(x)\right) = 1$$

21. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $(-\infty, 0)$ και ισχύουν:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x+1} = 2 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(xg(x)) = -2$$
να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)\,g(x)]$$

22. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+3x-2) = 0$$
Να υπολογίσετε τα όρια:
   i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
   ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+ax)$, $a\in\mathbb{R}$

23. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+3x}{\sqrt{x^2+1}+x} = 4$$
   i Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
   ii Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία ισχύει:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)+ax^2+3x}{xf(x)-x^2+13} = 3$$

24. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2^x+3^x)\,f(x)+\eta\mu x}{2^{x+2}-3^{x+1}} = 2$$
Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

25. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:
$$2x^3-3x^2 \le \left(x^3-5x+2\right) f(x) \le 2x^3+3x^2 \ , \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
Να υπολογίσετε τα όρια:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

26. Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$\left|\left(1+x^3\right) f(x)-x^2\right| \le x \ , \ \text{για κάθε } x>0$$
Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

27. Να υπολογίσετε τα όρια:
   i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$
   ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-\eta\mu x}{4+\sigma\upsilon\nu x}$
   iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{3+\eta\mu x}$
   iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}[ln(x+\eta\mu x)-ln2x]$

28. i Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}=0$$

ii Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt[3]{1+e^{-x}}+2\eta\mu 3x}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+2x-8}$$

i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$$

iii Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf\left(x\right)\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x\cdot f\left(x\right)\right)$

30. Έστω $k>0$. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left|f\left(x\right)\right|\leq k \ \ , \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x^n}=0$$

ii Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x\right)f\left(x\right)-x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\left(x-1\right)\eta\mu x}=-1$$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

Κεφάλαιο 3

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ορισμός: Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος (a, β) .

Ορισμός: Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) . $[a, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος (a, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0. Τότε:

- Η συνάρτηση kf, $k \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο x_0.
- Η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0.
- Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.
- Η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0, υπό την προϋπόθεση ότι $g(x_0) \neq 0$.
- Η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο x_0.
- Η συνάρτηση $\sqrt[n]{f}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, είναι συνεχής στο x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω δύο συναρτήσεις f και g. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι όλες συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους:
Οι πολυωνυμικές, οι ρητές, οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές και οι λογαριθμικές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x<1 \\ \lambda x^2 - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

i Το $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

ii Το $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

iii Το λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-18}{\sqrt{x}-3} & , \quad x>9 \\ \lambda x + 3 & , \quad x \leq 9 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

i Το $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x)$.

ii Το $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x)$.

iii Το λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 9$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1 & , \quad x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & , \quad x>3 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

i Το $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.

ii Το $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

iii Το λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+6x-7}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ \lambda - 2 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

i Το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

ii Το λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3a}{x^3} + 1 & , \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} & , \quad x>2 \end{cases}$$

όπου a πραγματικός αριθμός. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9} + 2\beta & , \quad x<0 \\ x^2 + a & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

όπου a, β πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και η γραφική της παράσταση να να διέρχεται από το σημείο $A(1,6)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ \left(a^2 + \beta^2\right) ln\,(x - 5 + e) + 2\,(a + 1)\,e^{5-x} & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

   i Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

   ii Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 5$.

   iii Για τις τιμές των a και β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

8. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2} & , \quad 1 < x < 2 \\ 5 & , \quad x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

9. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \eta\mu \left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

   όπου n θετικός ακέραιος.

10. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \eta\mu \left(\dfrac{1}{x}\right)}{\eta\mu x} & , \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

11. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} + x & , \quad x \leq -1 \\ 2x^2 - ax + 3\beta & , \quad -1 < x < 0 \\ \beta\eta\mu x + a\sigma\upsilon\nu x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x \leq 0 \\ ax + \beta & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 + xlnx & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

13. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - \sqrt{x+4}}{\eta\mu 2x} & , \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

   είναι συνεχής στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

14. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}-\eta\mu x}{x^2-x} & , \quad x<0 \\ \\ x+a & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

i Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

15. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ, μ ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\kappa x^3+\lambda x^2+2}{|x-1|} & , \quad x\neq 1 \\ \\ \mu & , \quad x=1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

16. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, β, γ ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax+\beta}{|x+1|} & , \quad x\neq -1 \\ \\ \gamma & , \quad x=-1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

17. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{t^2\eta\mu\left(\dfrac{1}{t}\right)}{2tx+1} \quad , \quad t>0$$

i Να βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου x, όπου $x\in[0,+\infty)$.

ii Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

18. Θεωρούμε μία συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ με $g(0)=0$ και μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$|f(x)|\leq|g(x)| \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

19. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left|f(x)-x^2+x\right|\leq|x| \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

20. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|f(x)-3x+2|\leq x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

21. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, για την οποία ισχύει:

$$x-\eta\mu^2 x\leq xf(x)\leq x+\eta\mu^2 x \quad , \quad \text{για κάθε } x\neq 0$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

22. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|xf(x)| \leq |x - \eta\mu x| \quad , \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να βρείτε το $f(0)$.

23. Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|2f(x) + 3| \leq (x - 9)^6 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 9$.

ii Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} a^3 x^{\frac{3}{2}} + 8 & , \quad 0 < x \leq 9 \\ \dfrac{2f(x) + 3}{x - 9} & , \quad x > 9 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 9$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + f^2(x)} \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

25. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} \frac{xf(x) + \eta\mu^2 x}{\eta\mu x} = 3$$

να βρείτε το $f(0)$.

26. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -4)$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + f(x)}{x - 2} = 5$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

27. Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) f(x) + 1 - \sqrt{x}}{\eta\mu (x - 1)} = 2$$

Να βρείτε το $f(1)$.

28. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)\, \eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = 3$$

να βρείτε το $f(0)$.

29. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)\, \eta\mu(\pi x)}{x^2 - x} = +\infty$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

30. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$x^2 f(x) = \eta\mu x \cdot \eta\mu 3x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(0)$.

31. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$xf(x) \le x^2 + 4x + \eta\mu x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(0)$.

32. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$(x-1)f(x) \ge \sqrt{x^2+3} - 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(1)$.

33. Αν για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y| \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

34. Να βρείτε μία συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + \sqrt{x^2+x+2} = 1 + x(f(x)+1) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

35. Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

36. Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 3xy \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

   i Να βρείτε το $f(0)$.

   ii Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

37. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^*$.

3.2 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Το Θεώρημα Bolzano: Έστω μία συνάρτηση f η οποία:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

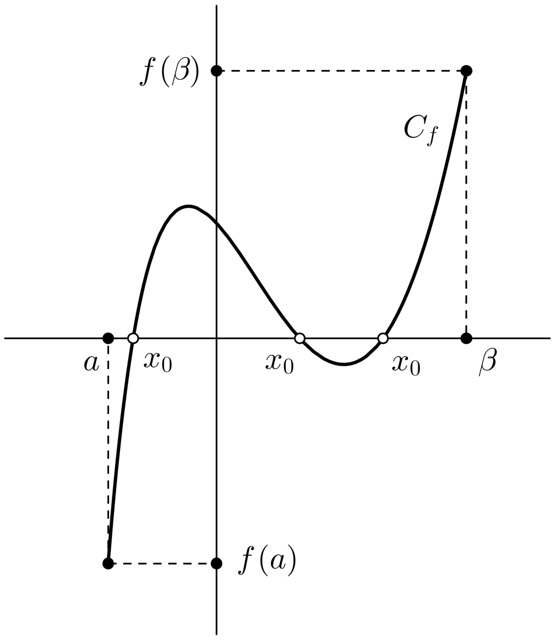
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον μία φορά σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο ανοικτό διάστημα (a, β), όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.

Σχήμα 3.1: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano



- Το θεώρημα Bolzano με άλλα λόγια μας λέει ότι αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσις του σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β). Θα το χρησιμοποιήσουμε επομένως στην επίλυση εξισώσεων.
- Το x_0 του θεωρήματος δεν είναι υποχρεωτικά μοναδικό. Θα είναι μοναδικό αν η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα στο διάστημα $[a, \beta]$.

Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (ΘΕΤ): Έστω μία συνάρτηση f η οποία:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό k που βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = k$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

$$f(a) < k < f(\beta) \tag{3.1}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - k,\ x \in [a, \beta]$.
Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ γιατί η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Επιπλέον λόγω της σχέσης (3.1) ισχύει:

$$g(a) = f(a) - k < 0 \text{ και } g(\beta) = f(\beta) - k > 0$$

Συνεπώς,

$$g(a) \cdot g(\beta) < 0$$

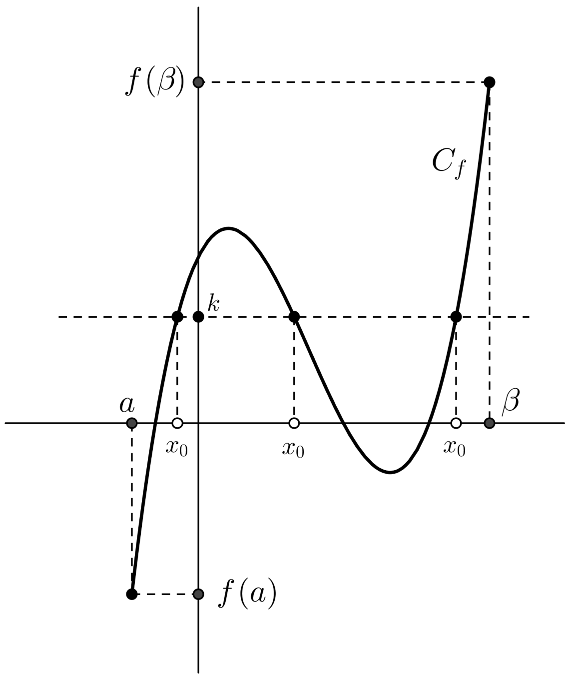
άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad f(x_0) - k &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad f(x_0) &= k \end{aligned}$$

Παρατηρησεις

- Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f θα τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $y = k$, όπου k οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$, τουλάχιστον μία φορά σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο ανοικτό διάστημα (a, β), όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.

Σχήμα 3.2: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών



- Το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών είναι γενίκευση του θεωρήματος Bolzano και μας λέει ότι αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εξίσωση $f(x) = k$, όπου k οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β). Θα το χρησιμοποιήσουμε επομένως και αυτό στην επίλυση εξισώσεων.
- Το x_0 του θεωρήματος δεν είναι υποχρεωτικά μοναδικό. Θα είναι μοναδικό αν η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα στο διάστημα $[a, \beta]$.

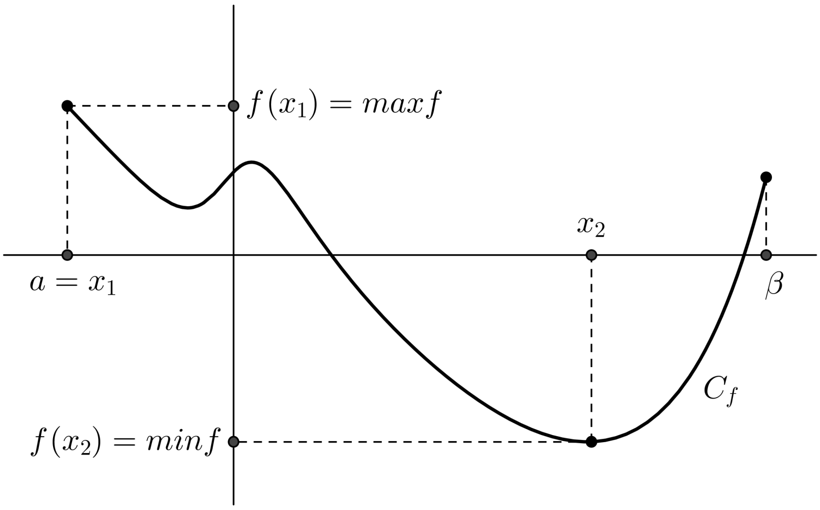
Το Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής (ΘΜΕΤ): Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,\beta]$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [a,\beta]$ να ισχύει:

$$f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$, τότε μέσα στο διάστημα αυτό θα παρουσιάζει τουλάχιστον μία φορά μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Σχήμα 3.3: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής



- Οι αριθμοί x_1 και x_2 όπου εμφανίζεται η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της f μπορούν να είναι και τα άκρα του διαστήματος $[a,\beta]$.
- Το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης που είναι συνεχής αλλά όχι σταθερή σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ είναι επίσης κλειστό διάστημα.

Μονοτονία και σύνολο τιμών συνεχών συναρτήσεων:

- Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.
  1. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$, τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα:
  $$[f(a), f(\beta)]$$
  2. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$, τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα:
  $$[f(\beta), f(a)]$$
- Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα (a, β), όπου $a, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
  1. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β), τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα:
  $$\left(\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to \beta^-} f(x)\right)$$
  2. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, β), τότε έχει σύνολο τιμών το διάστημα:
  $$\left(\lim_{x \to \beta^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x \cdot 2^{x+1} + 2^{x+1} - 1 = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$\eta\mu\left(\frac{\pi \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\pi \cdot \eta\mu x\right) = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$e^x = 3 - 2x$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$3x + lnx = x^2 + 1$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu a + 12x - 3 = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

7. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) = x$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει:
$$-1 < f(x) < 2 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$
να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) + \sigma\upsilon\nu(\pi x) = x^2$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

9. Δίνεται μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$0 < f(x) < 4 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f^2(x) - 4f(x) + 5x = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

10. Θεωρούμε μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$. Αν $f(2) - 5 = f(1)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) = x^2$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

11. Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει:
$$f^2(a) + f^2(\beta) \leq 6f(a) - 2f(\beta) - 10$$
Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β) .

12. Δίνεται μία συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}^*$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Αν η εξίσωση:

$$f(a)\, x^2 + \lambda x - f(\beta) = 0 \ \ , \ \ \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (a, β).

13. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - 3f^2(x) + 5f(x) = 2x - 1 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

14. Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό κ και δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες γνωρίζομε ότι:

- η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές ετερόσημες ρίζες.
- $f(x) - g(x) = \kappa x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

15. Θεωρούμε δύο μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a και β με $a + \beta \neq 0$ και δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει:

$$a\beta f^2(x) + (a + \beta)\, g(x) + a\beta x = 0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των A και B.

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.

17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{4x - \pi} = \frac{\eta\mu x}{4x + \pi}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

18. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{e^x + 1}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

19. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = e^x - 1 \ \text{ και } \ g(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$$

τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο που η τετμημένη του ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

20. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

21. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(3 - x)\, lnx = x^3 - 5x^2 + 5x$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1, 4)$.

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^2 - \sigma\upsilon\nu x = x\eta\mu^2 x$$
έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

23. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^5 = 2 - 5x^2$$
έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

24. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^3 + 3x + 1 = 0$$
έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

25. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$lnx + 2x = 0$$
έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

26. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύει:
$$f(a) = \beta^2 \text{ και } f(\beta) = a^2$$
Αν ισχύει $|a| \neq |\beta|$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$f(x_0) = x_0^2$$

27. Δίνεται μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$\frac{f(x_0)}{x_0 - a} = \frac{f(a) + f(\beta)}{\beta - a}$$

28. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(a, -1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$x_0 (f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - a$$

29. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα σε αυτό με $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$f(lnx_0) = lnx_0$$

30. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $|a| < 1$ για την οποία ισχύει:
$$f^2(a) + f^2(\beta) + 2 = 2(f(a) - f(\beta))$$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$f(x_0) = x_0^2$$

31. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$x^2 f(x) + \eta\mu x = x f(x) + \sqrt{x}\eta\mu x \quad , \text{ για κάθε } x \geq 0$$
   i Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.
   ii Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$2f(\xi) = \xi$$

32. Δίνεται μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και για την οποία ισχύει:
$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad , \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) = x$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

33. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:[a,\beta]\to[a,\beta]$, όπου $a\beta>0$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[a,\beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\xi f(\xi)=a\beta$$

34. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(-1)=2\kappa \text{ και } f(2)=-\lambda\ ,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[-1,2]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\kappa-f(\xi)=\lambda\xi$$

35. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,6]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x)-6f(x)+9x=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.

36. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και ισχύει:

$$f(a)+f(\beta)=0$$

να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[a,\beta]$.

37. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ και οι μη αρνητικοί αριθμοί κ και λ ώστε:

$$\kappa+\lambda=1$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[a,\beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x_0)=\kappa f(a)+\lambda f(\beta)$$

38. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[a,\beta]\to[a,\beta]$ με:

$$f(a)=a \text{ και } g(\beta)=\beta$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[a,\beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\kappa f(x_0)+\lambda g(x_0)=(\kappa+\lambda)x_0$$

όπου οι κ και λ είναι ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί.

39. Δίνεται μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει:

$$-1<f(x)\leq 0\ \ ,\ \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f^2(\xi)+f(\xi)+\xi=0$$

40. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[0,1]$ οι οποίες έχουν σύνολο τιμών το διάστημα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f^2(\xi)+g^2(\xi)=\xi^2$$

41. Έστω μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,a]$ για την οποία ισχύει: $f(0)=f(a)$.

   i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x)=f(x)-f\left(\frac{a}{2}+x\right)$$

   είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{a}{2}\right]$.

ii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{a}{2}+x\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{a}{2}\right]$.

42. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=3-\eta\mu\left(\pi x\right)+\frac{x^3}{4}$$

μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$ όταν $x\in\left[-2,2\right]$.

43. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,3\right]$ και για την οποία ισχύει:

$$f\left(x\right)+x^3+3f^3\left(x\right)=27\ \ ,\ \ \text{για κάθε } x\in\left[1,3\right]$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(1,3\right)$.

44. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f\left(x\right)=\eta\mu 2x-\sqrt{2}\eta\mu x$$

όταν $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

45. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f\left(x\right)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)f\left(x\right)}{\sqrt{x+3}-2}=8$

i Να βρείτε την τιμή $f\left(1\right)$.

ii Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(2\right)x^3-2x^2+3x-5\right]$$

46. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f\left(x\right)\neq 0\ \ ,\ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$xf\left(x\right)=\left(x^2-4\right)e^x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-2,2\right)$.

47. Να βρεθεί μία μη μηδενική συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2\left(x\right)=2e^xf\left(x\right)\ \ ,\ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

48. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(0\right)>1$ για την οποία ισχύει:

$$f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)=x^2\ \ ,\ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

49. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}$$

i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

iii Να εξετάσετε την f ως προς την συνέχεια.

iv Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

v Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο ώστε:

$$f\left(x_0\right)=\frac{3}{2}$$

50. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}-ln\left(9-x\right)$$

i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

iii Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\sqrt{x} = e + ln\,(9 - x)$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

51. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$$

i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ii Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

iv Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$e^x\sqrt{x} = 1 + 2010 \cdot e^x$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

52. Δίνεται η συνάρτηση: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ me:

$$f\,(x) = x^4 - 2x^2$$

i Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii Να βρείτε την αντίστροφη της f.

53. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = (a, \beta)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(a, \gamma]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\gamma, \beta)$, όπου $\gamma \in (a, \beta)$. Αν:

- $f\,(\gamma) = -1$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f\,(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to \beta^-} f\,(x) = 3$

να βρείτε:

i Το σύνολο τιμών της f.

ii Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f\,(x) = 0 \;\;,\;\; x \in \Delta$$

54. Έστω μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1,3] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$3f\,(x_0) = f\,(1) + f\,(2) + f\,(3)$$

55. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$. Αν $f\,(0) = 2$ και $f\,(1) = 4$, να αποδείξετε ότι:

i Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

ii Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f\,(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

56. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [2,5] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [2,5]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$10f\,(x_0) = 7f\,(3) + 3f\,(4)$$

57. Θεωρούμε μία συνεχή και μη σταθερή συνάρτηση $f : [2,4] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [2,4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f\,(\xi) = \frac{f\,(2) + 2f\,(3) + 3f\,(4)}{6}$$

Κεφάλαιο 4

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ορισμός: Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός λέγεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ένας ισοδύναμος ορισμός για την παράγωγο μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου:
Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση f και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης. Αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0, τότε ορίζουμε σαν εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A, την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$.

  Έστω μία συνάρτηση f και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A είναι η ευθεία με εξίσωση:

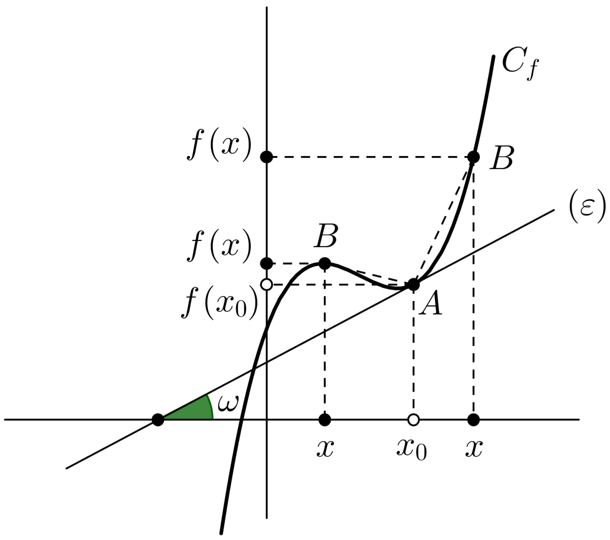
$$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

- Η παράγωγος $f'(x_0)$ μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$. Δηλαδή ισχύει:

$$f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$$

  Για τον λόγο αυτό $f'(x_0)$ ονομάζεται και κλίση της f στο σημείο x_0.

Σχήμα 4.1: Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου



- **Ορισμός:** Έστω ότι δύο μεταβλητά μεγέθη x και y συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$y=f(x)$$

  όπου η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Ο αριθμός $f'(x_0)$ ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x όταν $x=x_0$.

Θεώρημα (Παράγωγος και συνέχεια): Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι συνεχής στο σημείο x_0.

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως:

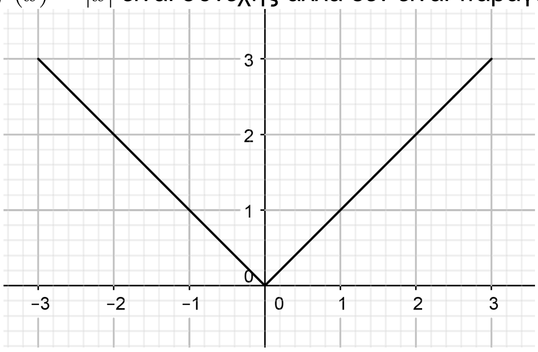
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left[(x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \cdot f'(x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0.

Παρατηρησεισ:

- Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Σχήμα 4.2: Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε με την βοήθεια του ορισμού αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο αντίστοιχο σημείο:

   i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ στο σημείο $x_0 = 1$

   ii) $f(x) = \eta\mu^2 x$ στο σημείο $x_0 = 0$

   iii) $f(x) = |x-1|$ στο σημείο $x_0 = 1$

   iv) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & , \quad x<0 \\ x+1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$

   v) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$

2. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \quad x<0 \\ 1+\eta\mu x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης παράστασης της f στο σημείο της $A(0,1)$ και ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

   Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^3(\pi|x|)}{x^3} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

   i Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

   ii Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

5. Για μία συνάρτηση f ισχύει:

$$f(1+h) = 3 - 3h + 3h^2 - h^3 \quad , \quad \text{για κάθε } h \in \mathbb{R}$$

   Να βρείτε το $f'(1)$.

6. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$x(f(x)+3) = 2 + x^3 + f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

   Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

7. i Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

   ii Με την βοήθεια της συνάρτησης $f(x) = |x|$, να αποδείξετε ότι το όριο του προηγούμενου ερωτήματος μπορεί να υπάρχει για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, χωρίς η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.

8. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & , \quad x \leq 1 \\ ax+2\beta & , \quad x>1 \end{cases}$$

   Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

9. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2\beta\sqrt{x+3} + 6 & , \quad x < 1 \\ x^2 + (a+\beta)x - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + (\beta - 1)x - 3a & , \quad x \leq -1 \\ x^2 + \left(a^2 + 5\right)x + 2 - \beta & , \quad x > -1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -1$.

11. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $f'(1) = 2$ καθώς και την συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f^3(x) & , \quad x \leq 1 \\ ax^2 + \beta & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β ώστε η συνάρτηση g να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

12. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = a$ με $a > 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ ii) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^2(x) - f^2(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει $f(1) = f'(1) = 1$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x) - 1}{x^2 - 3x + 2}$ ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{xf(x) - 1}{x^2 - x}$

iii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}f(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$

14. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

15. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = a$, να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a} = a^2 f'(a) - 2af(a)$

ii) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} = g(a)f'(a) - f(a)g'(a)$

16. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 5h)}{h}$ ii) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^2(x_0 - 2h) - f^2(x_0 + 5h)}{h}$

17. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, $f'(0) \neq 0$ και ισχύει:

$$|f(x) - \eta\mu x| \leq x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x) - f(2x)}{f(2x) - f(x)}$$

18. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 3$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2 + 3h) - f(2 - 5h)}{f(2 + 6h) - f(2 - 2h)}$$

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 4$, να αποδείξετε ότι:

i $f(0) = 0$

ii $f'(0) = 4$

20. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f(0) = 0$ και ισχύει:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x) + 4xf(x)}{x^2} = -4$$
να αποδείξετε ότι:
$$f'(0) = -2$$

21. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και ισχύει:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \alpha}{x - x_0} = m \quad , \quad \alpha, m \in \mathbb{R}$$
να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

22. Αν η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = a$ me $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = a$ και ισχύει:
$$f'(a) = \frac{1}{a}\left(g'(a) - f(a)\right)$$

23. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει:
$$x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και να υπολογίσετε το $f'(0)$.

24. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει:
$$x^3 + |\eta\mu 2x| \leq f(x) \leq x^3 + 2|x| \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

25. Θεωρούμε μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$$f^3(x) + f(x) = x \cdot \eta\mu x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
i Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$|f(x)| \leq |x \cdot \eta\mu x|$$
ii Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

26. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και ισχύει:
$$f^3(x) - 2xf^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta\mu 2x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

27. Θεωρούμε μία συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:
$$f(0) = 0 \ \text{ και } \ |f(x)| \geq \sqrt[3]{x^2} \quad , \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

28. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, μία συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο αυτό και επιπλέον ισχύει:
$$f(x) = |x - 1|\, g(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
να υπολογίσετε την τιμή $g(1)$.

29. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:
$$g(x) = \begin{cases} f\left(x^2\right) & , \quad x \leq 1 \\ f(2x - 1) & , \quad x > 1 \end{cases}$$
είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει:
$$g'(1) = 2f'(1)$$

30. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 0$ με:

$$f(0) = g(0) = 0 \text{ και } xf(x) - \eta\mu x \cdot g(x) = x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f'(0) = g'(0) + 1$$

31. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 0$ με:

$$f(0) = g(0) = 0 \text{ και } f(x) \leq g(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f'(0) = g'(0)$$

32. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 με:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ και } g'(x_0) \neq 0$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

33. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $P(x)$, έναν πραγματικό αριθμό a και την συνάρτηση:

$$f(x) = |x - a| P(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = a$ αν και μόνο αν το $x - a$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

34. Έστω ένας πραγματικός αριθμός a, μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = a$ και μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Έστω ακόμη ότι ισχύουν:

   - $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_1$
   - $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_2$

   όπου m_1, m_2 πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι h h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ αν και μόνο αν $g(a) = 0$.

35. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

36. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^*$.

37. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

4.2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε το παρακάτω υποσύνολο του πεδίου ορισμού της A.

$$A_1 = \{x \in A \ / \ \text{h } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x\} \neq \emptyset$$

Ορίζουμε μία νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A_1 η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A_1$ τον παράγωγο αριθμό $f'(x)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** ή απλά **παράγωγος** της f και συμβολίζεται f'.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την δεύτερη παράγωγο f'' της συνάρτησης f ως την παράγωγο της πρώτης παραγώγου, δηλαδή $f'' = (f')'$, την τρίτη παράγωγο f''' της f ως την παράγωγο της δεύτερης παραγώγου, και ούτω καθεξής την νιοστή παράγωγο της f :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

4.2.1 Κανόνες παραγώγισης

1. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Τότε η συνάρτηση kf, $k \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$$

2. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0. Τότε η συνάρτηση $f+g$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
Απόδειξη: Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0, ισχύουν:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$
Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε:
$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$
Επομένως,
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

3. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0. Τότε η συνάρτηση $f \cdot g$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

4. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 με $g(x_0) \neq 0$. Τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

5. Έστω δύο συναρτήσεις f και g όπου η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $g\left(x_0\right)$. Τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'\left(x_0\right) = f'\left(g\left(x_0\right)\right) \cdot g'\left(x_0\right)$$

Οι παραπάνω κανόνες γενικεύονται και σε διαστήματα που οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες. Δηλαδή αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύουν:

- $(kf\left(x\right))' = kf'\left(x\right)$, $x \in \Delta$
- $\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right) + g'\left(x\right)$, $x \in \Delta$
- $\left(f\left(x\right) \cdot g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right) \cdot g\left(x\right) + f\left(x\right) \cdot g'\left(x\right)$, $x \in \Delta$
- $\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)' = \dfrac{f'\left(x\right) \cdot g\left(x\right) - f\left(x\right) \cdot g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}$, $x \in \Delta$ με $g\left(x\right) \neq 0$.
- $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right) \cdot g'\left(x\right)$, $x \in \Delta$ με f παραγωγίσιμη στο $g\left(\Delta\right)$.

4.2.2 Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

1. Έστω $f\left(x\right) = c$, $c \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$$

Δηλαδή $f'\left(x\right) = (c)' = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $f\left(x\right) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x)' = 1$$

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 1$$

Δηλαδή $f'\left(x\right) = (x)' = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Έστω $f\left(x\right) = x^n$, n θετικός ακέραιος $n > 1$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\
&= \frac{\left(x - x_0\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} \\
&= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \ldots + x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\ldots+x_0^{n-1}\right)\\ &= x_0^{n-1}+x_\bullet^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1}\\ &= nx_0^{n-1}\end{aligned}$$

Δηλαδή $f'(x)=(x^n)'=nx^{n-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4. Έστω $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$. Τότε για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη: Έστω $x_0>0$
Για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}\\ &= \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Δηλαδή $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x>0$.
Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

5. Έστω $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$$

6. ’Εστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$$

7. Έστω $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' \\
&= \frac{(\eta\mu x)\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\,(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\
&= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\
&= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\
&= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}
\end{aligned}$$

8. Έστω $f(x) = \sigma\varphi x$, $x \in \mathbb{R} - \{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ισχύει:

$$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

9. Έστω $f(x) = x^{-n}$, n θετικός ακέραιος και $x \in \mathbb{R}^*$. Τότε για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}$$

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)'\,x^n - 1\,(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$

10. Έστω $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(e^x)' = e^x$$

11. Έστω $f(x) = lnx$, $x \in (0, +\infty)$. Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

12. Έστω $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και $x \in (0, +\infty)$. Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Απόδειξη: Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^a = e^{lnx^a} = e^{alnx}$$

Επομένως,

$$(x^a)' = \left(e^{alnx}\right)' = e^{alnx}\,(alnx)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

13. Έστω $f\left(x\right)=a^{x}$, $0<a\neq 1$ και $x\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot lna$$

Απόδειξη: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^{x}=e^{lna^{x}}=e^{xlna}$$

Επομένως,

$$\left(a^{x}\right)'=\left(e^{xlna}\right)'=e^{xlna}\left(xlna\right)'=a^{x}\cdot 1\cdot lna=a^{x}\cdot lna$$

14. Έστω $f\left(x\right)=ln\left|x\right|$, $x\in\mathbb{R}^{*}$. Τότε για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:

$$\left(ln\left|x\right|\right)'=\frac{1}{x}$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε:

$$\left(ln\left|x\right|\right)'=\left(lnx\right)'=\frac{1}{x}$$

- αν $x<0$, τότε:

$$\left(ln\left|x\right|\right)'=\left(ln\left(-x\right)\right)'=\frac{1}{-x}\left(-x\right)'=\frac{1}{-x}\left(-1\right)=\frac{1}{x}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 8x - 2$ ii) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - 1$

   iii) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 5\eta\mu x + \sqrt{2}e^x$ iv) $f(x) = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$

   v) $f(x) = -lnx - x^5 + 1$ vi) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2^x$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = xlnx$ ii) $f(x) = e^x\sigma\upsilon\nu x$

   iii) $f(x) = x^3\eta\mu x$ iv) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)e^x$

   v) $f(x) = x\varepsilon\varphi x$ vi) $f(x) = x^2 e^x \sigma\upsilon\nu x$

3. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ ii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$

   iii) $f(x) = \frac{e^x}{lnx}$ iv) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{e^x}$

4. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = ln\left(x^2 + 3\right)$ ii) $f(x) = e^{\eta\mu x}$

   iii) $f(x) = e^{-x^2}$ iv) $f(x) = \left(3x^4 + 4x^3\right)^{-2}$

   v) $f(x) = \eta\mu\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ vi) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3\left(1 + x^4\right)$

   vii) $f(x) = \eta\mu^2(-\sigma\upsilon\nu x)$ viii) $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$

5. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = x^x$ ii) $f(x) = x^{2x+1}$

6. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

7. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta\mu^2\left(\sqrt{x}\right)$$

8. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ ισχύουν:

$$f(1) = 2 \text{ και } f'(1) = 5$$

   Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = xf(x) - \frac{x^2}{f(x)}$$

   Να υπολογίσετε την τιμή $g'(1)$.

9. Έστω δύο συναρτήσεις f και g που έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης, να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $h_1(x) = f^2(x)\,g(x)$ ii) $h_2(x) = \frac{\sqrt{1 + f^2(x)}}{g(x)}$

   iii) $h_3(x) = f(lnx) - g^2(\eta\mu x)$ iv) $h_4(x) = f(f(x)) + g\left(f\left(x^2\right)\right)$

10. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & , \quad x < 0 \\ 12\sqrt{x} + 6x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

11. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & , \quad x \leq -\dfrac{4}{3} \\ 2x + 1 & , \quad x > -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

i Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$.

ii Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$.

iii Για $x \neq -\dfrac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$$

12. Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{x^2 + (ax + \beta + 1) e^{tx}}{2 + e^{tx}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & , \quad x < 0 \\ \dfrac{\beta + 1}{3} & , \quad x = 0 \\ ax + \beta + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

ii Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

13. Έστω η συνάρτηση:

$$f() = -x + 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) + f(x) + x = 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

14. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu^2 x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) + 4f(x) = 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

15. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{ax} \quad , \quad a \in \mathbb{R} \, , \; x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου a έτσι ώστε να ισχύει:

$$f''(x) + 2f'(x) = 3f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

16. Έστω μία συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) + f(-x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

17. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu^2(ax) \quad , \quad a \in \mathbb{R} \, , \; x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του a ώστε να ισχύει:

$$f''(x) + 4a^2 f(x) = 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

18. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \left(x^2+1\right) f(x) + 3x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή $g'(0)$.

19. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

20. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad , \quad x \in (0, \pi)$$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii Θεωρείστε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και δείξτε ότι ισχύει:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x \in (-1,1)$$

21. Με την βοήθεια του ορισμού της παραγώγου να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{lnx}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{lnx - 1}{x-e}$ iv) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{x-\pi}$

22. Αν το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma \quad , \quad a, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$$

έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες ρ_1 και ρ_2, να αποδείξετε ότι:

i) $f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = 0$ ii) $f'(\rho_1) f'(\rho_2) < 0$

iii) $\dfrac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \dfrac{\rho_2}{f'(\rho_2)} = \dfrac{1}{a}$

23. Έστω ένας πραγματικός αριθμός ρ και τα πολυώνυμα $A(x), B(x)$ με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το πολυώνυμο $A(x)$ να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

i Να δείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε:

$$A(x) B(x) = (x-\rho)^2 f(x) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad A(\rho) = A'(\rho) = 0$$

ii Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο:

$$Q(x) = x^\nu \left(\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8\right)$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$.

24. Θεωρούμε μία συνάρτηση f με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ καθώς και μία συνάρτηση g με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

i Αν ισχύει:

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να δείξετε ότι:

$$|f'(0)| \leq 1$$

ii Έστω ν θετικός ακέραιος και $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu$ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$|a_1 \eta\mu x + a_2 \eta\mu 2x + a_3 \eta\mu 3x + \ldots + a_\nu \eta\mu\nu x| \leq |\eta\mu x| \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + \nu a_\nu| \leq 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων που ακολουθούν στο σημείο που σας δίνεται:

   i) $f(x) = \eta\mu x$ στο $x_0 = \pi$

   ii) $f(x) = \sqrt{x}$ στο $x_0 = 1$

   iii) $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$ στο $x_0 = 1$

   iv) $f(x) = e^{x^2+x}$ στο $x_0 = 0$

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
   $$f\left(x^3 + x + 1\right) = 7x^3 - x \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$.

3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β, γ αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση:
   $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & , \quad x \leq 1 \\ \beta - \dfrac{\gamma}{x^2} & , \quad x > 1 \end{cases}$$
   είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ και οι εφαπτομένες της γραφικής της παράστασης στα σημεία $(0, f(0))$ και $(2, f(2))$ είναι παράλληλες.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση:
   $$f(x) = x^3 + 3x^2 \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής της παράστασης που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

5. Θεωρούμε την συνάρτηση:
   $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 8 \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που:

   i είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 13x - 7$.

   ii είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$.

   iii σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$.

6. Θεωρούμε την συνάρτηση:
   $$f(x) = \frac{2}{x} \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}^*$$
   Η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M(a, f(a))$, $a \in \mathbb{R}$, τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

   i Το σημείο M είναι το μέσον του AB.

   ii Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό.

7. Θεωρούμε την συνάρτηση:
   $$f(x) = x^2 \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής της παράστασης που διέρχονται από το σημείο $A(-2, -5)$.

8. Θεωρούμε την συνάρτηση:
   $$f(x) = x^2 + 4x + 6 \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
   Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ εφάπτεται στην γραφική της παράσταση.

9. Θεωρούμε την συνάρτηση:
   $$f(x) = x^2 + ax + 1 \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η ευθεία $y = x + a$ να εφάπτεται στην γραφική της παράσταση.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = x^2 + 2ax + 3\beta \ , \ x \in \mathbb{R}$$
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η ευθεία $y = x + 3$ να εφάπτεται στην γραφική της παράσταση στο σημείο της που έχει τετμημένη ίση με 1.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = x^2 - 3x \ , \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{a}{x} \ , \ x \in \mathbb{R}^*$$
Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι εφαπτομένη και της C_g.

12. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = x^4 + ax + 3 \ , \ x \in \mathbb{R}$$
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε να υπάρχουν δύο εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της C_f που να διέρχονται από την αρχή των αξόνων και να τέμνονται κάθετα.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = 4 - x^2 \ , \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 8x - 20 \ , \ x \in \mathbb{R}$$
Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$$f(x) = \frac{1}{x} \ , \ x \in \mathbb{R}^* \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$
Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

15. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$g(x) = f(x)\, \eta\mu\,(ax) \ , \ a \neq 0$$
Αν το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, να αποδείξετε ότι στο σημείο M οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

16. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = xlnx - ax \ , \ x > 0 \ , \ a \in \mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

   i Να βρείτε την ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t.

   ii Ποιά είναι η ταχύτητα του σημείου την χρονική στιγμή $t = 2sec$;

   iii Πότε το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;

   iv Πότε το σημείο κινείται στην θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική;

   v Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό κατά τα πέντε πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του.

2. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $16\frac{cm^2}{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου όταν η πλευρά του είναι $5cm$.

3. Οι ακτίνες r και R με $r < R$, δύο ομόκεντρων κύκλων μεταβάλλονται κατά τέτοιον τρόπο ώστε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου δακτυλίου να παραμένει σταθερό και ίσο με $20\pi\frac{cm^2}{sec}$. Αν το μήκος του μικρότερου κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό $2\pi\frac{cm}{sec}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγάλου κύκλου όταν $r = \frac{4}{\pi}cm$.

4. Αν κατά την χρονική στιγμή t_0 η ακτίνα ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει είναι $5cm$ και ο ρυθμός αύξησης της ακτίνας του είναι $2\frac{cm}{sec}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του την χρονική στιγμή t_0.

5. Να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίον μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x, lnx)$ και $\Gamma(x,0)$, $x > 1$, την χρονική στιγμή κατά την οποία $x = 2cm$. Γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0.5\frac{cm}{sec}$.

6. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1)^3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Σημείο M κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η τετμημένη του απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων κινούμενη στον θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα $1\frac{cm}{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M με τον άξονα $x'x$, την χρονική στιγμή που αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x - 5$.

7. Ένα σημείο B κινείται πάνω στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 6$ στο ημικύκλιό του που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ ξεκινώντας από το σημείο $A\left(\sqrt{6}, 0\right)$. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής AB την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ίση με $60°$.

8. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και το ευθύγραμμο τμήμα $AB = 10m$ του οποίου τα άκρα A, B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2\frac{m}{sec}$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση:

$$s(t) = \upsilon t$$

όπου $t \in [0, 5]$ ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

   i Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του χρόνου.

   ii Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ την χρονική στιγμή που είναι $OA = 6m$;

4.3 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)
- $f(a) = f(\beta)$

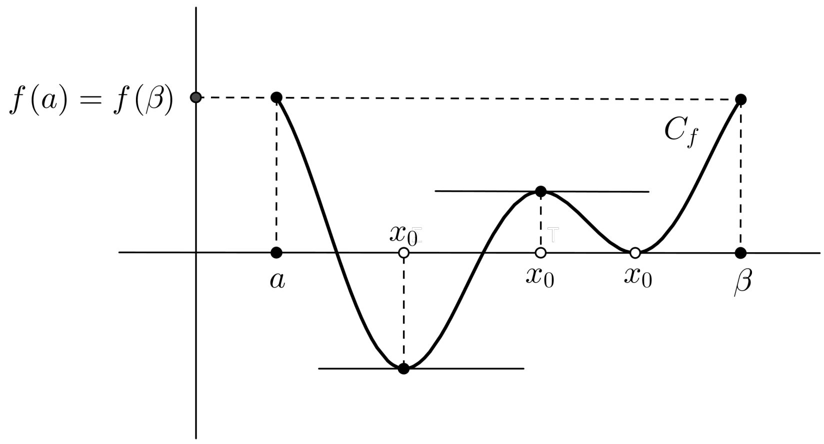
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(x_0) = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής της παράστασης με τετμημένη που ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Σχήμα 4.3: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle



- Το θεώρημα Rolle με άλλα λόγια μας λέει ότι αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β). Θα το χρησιμοποιήσουμε επομένως στην επίλυση εξισώσεων.
- Το x_0 του θεωρήματος δεν είναι κατά ανάγκη μοναδικό.

4.4 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (ΘΜΤ)

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,β)

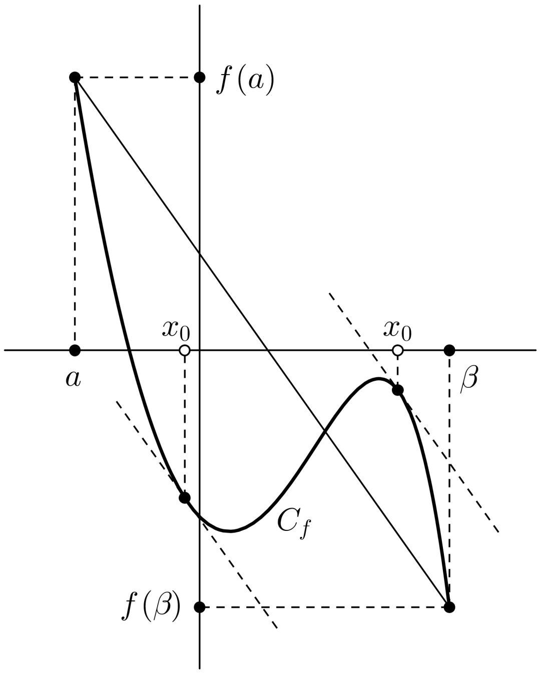
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής της παράστασης με τετμημένη που ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Σχήμα 4.4: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής



- Το x_0 του θεωρήματος δεν είναι κατά ανάγκη μοναδικό.
- Το θεώρημα Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής όταν $f(a) = f(\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=\left(x-3\right)lnx\ \ ,\ \ x>0$$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x_0\in\left(1,3\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2. Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$f\left(x^2\right)\geq\frac{1+f^2\left(x\right)}{2}\ \ ,\ \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=\begin{cases}2x+2 & ,\ \ x\leq-1\\ x^3-x & ,\ \ x>-1\end{cases}$$
   i Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $\left[-3,2\right]$.
   ii Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις, να εφαρμόσετε το θεώρημα και να βρείτε το x_0 του θεωρήματος.

4. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+ax+\beta & ,\ \ x<0\\ \gamma x^2+4x+2 & ,\ \ x\geq0\end{cases}$$
   i Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a,β,γ ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-2,2\right]$.
   ii Για τις τιμές των a,β,γ που βρήκατε, να βρείτε το x_0 του θεωρήματος.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$4x^3-21x^2+18x+6\kappa=0$$
έχει για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\left(1,2\right)$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0$$
έχει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\left(2,3\right)$.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^{2\nu+1}+a=\left(2\nu+1\right)x$$
όπου ν θετικός ακέραιος, έχει για κάθε $a\in\mathbb{R}$ το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\left(-1,1\right)$.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^5-5x+\lambda=0\ \ ,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$
δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $\left(-1,1\right)$.

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^4=4x-ln\left(a^2+1\right)\ \ ,\ \ a\in\mathbb{R}$$
έχει δύο το πολύ ρίζες στο διάστημα $\left(0,5\right)$.

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^4+2x^3+3x^2-\lambda x+\mu=0$$
έχει για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^4+2ax^3+6a^2x^2+\beta x+\gamma=0$$
έχει για κάθε $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $a\neq0$ το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

12. Θεωρούμε μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a,\beta]$ που είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β) . Αν:
$$f'(x) \neq 0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in (a,\beta)$$
να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) = 0$$
έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (a,β) .

13. Θεωρούμε μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a,\beta]$ που είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β) . Αν ξ_1, ξ_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο διάστημα (a,β) με $\xi_1 < \xi_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$f(x) = 0$$
έχει το πολύ μία ρίζα μεταξύ των αριθμών ξ_1 και ξ_2.

14. i Θεωρούμε το πολυώνυμο:
$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
όπου $a_0, a_1, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$, $a_\nu \neq 0$ και ν θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1. Αν το πολυώνυμο έχει μ διαφορετικές πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P'(x)$ έχει τουλάχιστον $\mu - 1$ διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

    ii Αν η εξίσωση:
$$x^4 - 5x^3 + \lambda x^2 + 5x - 6 = 0$$
έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, να δείξετε ότι $\lambda < \dfrac{75}{8}$.

15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$$
έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1,1)$.

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) = x$$
έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

17. Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
$$\frac{1}{2} < f(x) < 1 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in [1,2] \quad \text{και} \quad f'(x) \neq \frac{1}{2} \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in (1,2)$$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε:
$$f(\xi) = \frac{\xi}{2}$$

18. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = (x-1)\,\eta\mu x$$
Να αποδείξετε ότι:

    i Η εξίσωση:
$$f'(x) = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

    ii Η εξίσωση:
$$\varepsilon\varphi x = 1 - x$$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[0, \frac{1}{\kappa\pi}\right]$, όπου κ θετικός ακέραιος.

ii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\sigma\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(0, \frac{1}{\kappa\pi}\right)$, όπου κ θετικός ακέραιος.

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$$

i Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

21. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$4x^3 + 3(a-1)x^2 + 2\beta x = a + \beta \quad , \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$. Αν ισχύει:

$$f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

23. Για τους πραγματικούς αριθμούς $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ ισχύει:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{\nu} + \frac{a_\nu}{\nu+1} = 0$$

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύουν:

$$f(a) f'(\beta) = f(\beta) f'(a) \quad \text{και} \quad (f'(x))^2 \neq f(x) f''(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in (a, \beta)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

25. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση:

$$g(x) = \left(1 - x^2\right) f(x)$$

ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

ii Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{2x_0 \cdot f(x_0)}{1 - x_0^2}$$

26. Έστω δύο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα $[0,1]$, παραγωγίσιμες στο διάστημα $(0,1)$, $f(0) = f(1) = 0$ και
$$f(x) \neq 0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in (0,1)$$
   i Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση:
   $$h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$$
   ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$.
   ii Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:
   $$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$$

27. Έστω μία συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(a,0)$, $B(\beta,0)$ και $\Gamma(\gamma,0)$ με $a < \beta < \gamma$. Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση:
$$h(x) = f(x)\, e^{-x} \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
   i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την $h''(x)$.
   ii Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a,\gamma)$ τέτοιο ώστε:
   $$f''(\xi) - 2f'(\xi) + f(\xi) = 0$$

28. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση:
$$g(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-\beta) \ \ , \ \ x \in [a,\beta]$$
   i Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a,\beta]$.
   ii Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε:
   $$f'(\xi) = \frac{1}{a-\xi} + \frac{1}{\beta-\xi}$$

29. Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f(a)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε:
$$f'(x_0) = 2x_0 - a$$

30. Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:
$$f(\xi) = (1-\xi)\, f'(\xi)$$

31. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ και επιπλέον ισχύει $f(2) = 2f(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε:
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

32. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε:
$$f'(x_0) = 2 - \frac{f(x_0)}{x_0}$$

33. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$ και για την οποία ισχύουν:
$$f'(x) \neq 0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in (1,3) \quad \text{και} \quad f(3) = 0$$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε:
$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 ln x_0 = 0$$

34. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, \pi]$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x) \neq 0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in (0, \pi)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sigma\varphi\xi = 0$$

35. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x$ σε δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$ και $x_1 \neq -x_2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{6\xi}{x_1 + x_2}$$

36. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$, όπου $a, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η οποία έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

$$f(a) = \beta \ \ , \ \ f(\beta) = a \ \text{ και } \ \frac{a}{\beta} = \frac{\eta\mu a}{\eta\mu\beta}$$

να αποδείξετε ότι:

i Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0)\,\varepsilon\varphi x_0 + f(x_0) = 0$$

ii Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) \cdot f'(f(\xi)) = 1$$

37. Έστω δύο συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε δύο σημεία με τετμημένες a και β, όπου $a < \beta$ και $f(a) + f(\beta) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{2g(x_0)\, g'(x_0)}{f(a) + f(\beta)}$$

38. Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ με $f(0) = f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 3\xi^2 f(\xi)$$

39. Αν $a < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$e^a < \frac{e^\beta - e^a}{\beta - a} < e^\beta$$

40. Αν $0 < a < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\beta} < \frac{ln\beta - lna}{\beta - a} < \frac{1}{a}$$

41. Να αποδείξετε ότι:

$$2 - \frac{e}{2} < ln2 < \frac{2}{e}$$

42. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{1}{x+1} < ln(x+1) - lnx < \frac{1}{x}$$

43. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x + 1 \leq e^x \leq xe^x + 1$$

44. Αν $0 < a < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$ae < \left(\frac{\beta^\beta}{a^a}\right)^{\frac{1}{\beta - a}} < \beta e$$

45. i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y| \leq |x - y|$$

ii Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right|$$

46. Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 4)$ και για την οποία ισχύουν:

$$2 \leq f'(x) \leq 5 \ \ , \ \text{για κάθε } x \in (0,4) \quad \text{και} \quad f(0) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$9 \leq f(4) \leq 21$$

47. i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

ii Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} \ \ , \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|\beta - a|$$

48. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x+1) + f(x) < f(x+1)$$

49. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και για την οποία ισχύει:

$$f'(x) \leq 1 \ \ , \ \text{για κάθε } x \in (-1, 1)$$

Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$f(0) = 0$$

50. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$f(2) - f(1) = f(5) - f(4)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(x_0) = 0$$

51. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f η οποία να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 2]$ και για την οποία να ισχύουν:

$$f'(0) = 1 \ \ , \ \ f'(2) = 0 \ \text{και} \ f''(x) > 0 \ \ , \ \text{για κάθε } x \in (0, 2)$$

52. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β), να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε:

$$2f'(\xi_3) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$$

53. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 με $a < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \beta$ τέτοιοι ώστε:

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$$

54. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$ με:

$$f(1) = f(3) = 0 \text{ και } f(2) \neq 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε:

$$|f''(x_0)| > |f(2)|$$

55. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$ με:

$$f(1) = 3 \text{ και } |f'(x)| \leq 2 \ , \ \text{ για κάθε } x \in [0,2]$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει:

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

56. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$ με:

$$(f(2) - f(1))(f(1) - f(0)) < 0$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

57. Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,β) με $f(a) = \beta$ και $f(\beta) = a$. Να αποδείξετε ότι:

   i Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = x_0$$

   ii Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,\beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε:

$$f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 1$$

58. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) \leq 1 \ , \ \text{ για κάθε } x \in (a,\beta) \quad \text{ και } \quad f(\beta) - f(a) = \beta - a$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x + f(a) - a$$

59. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

   i Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}$$

   ii Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$$

60. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \kappa$ σε τρία διαφορετικά σημεία με τετμημένες x_1, x_2, x_3, όπου $x_1 < x_2 < x_3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi) = 0$$

61. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,β) και της οποίας η παράγωγος f' είναι ένα προς ένα στο (a,β). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική της παράσταση.

4.5 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΜΤ

Οι παρακάτω προτάσεις είναι συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Πρόταση 1: Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\varDelta$ και για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\varDelta$. Τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα $\varDelta$.

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία x_1 και x_2 του διαστήματος $\varDelta$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ αφού η f είναι συνάρτηση.
Έστω $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Όμως το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\varDelta$, συνεπώς ισχύει:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad f(x_1) &= f(x_2) \end{aligned}$$

Πρόταση 2: Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $\varDelta$ και για τις οποίες ισχύει $f'(x) = g'(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\varDelta$. Τότε οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μία σταθερά, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \varDelta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad x \in \varDelta$$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $\varDelta$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε εσωτερικό σημείο του $\varDelta$ ισχύει:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η συνάρτηση h είναι σταθερή στο διάστημα $\varDelta$, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \varDelta$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} h(x) &= c \\ \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) &= c \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &= g(x) + c \end{aligned}$$

Πρόταση 3: Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\varDelta$ και για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\varDelta$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \varDelta$ να ισχύει:

$$f(x) = ce^x$$

Πρόταση 4: Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ. Τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ. Τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ του διαστήματος Δ. Θα αποδείξουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Όμως το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ, συνεπώς ισχύει:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &> 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &> 0 \\ \Leftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) &< 0 \quad (\text{afo'u } x_1 - x_2 < 0) \\ \Leftrightarrow \quad f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Το αντίστροφο της πρότασης (4) δεν ισχύει. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ χωρίς η πρώτη παράγωγός της να είναι θετική ή αρνητική σε όλα τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ. Στην πραγματικότητα αν μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ, είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε ισχύει $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) \leq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, με τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου να συμβαίνει ενδεχομένως σε μεμονωμένα σημεία του διαστήματος Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για τις συναρτήσεις f και g σε ένα διάστημα $\varDelta$ ισχύουν:

$$f'(x) = g(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = -f(x)$$

   να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = f^2(x) + g^2(x)$$

   είναι σταθερή στο διάστημα $\varDelta$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x - \frac{3}{2}\left(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x\right)$$

   είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή της.

3. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

   - $f(1) = e$
   - $x^2 f'(x) - f(x) = 0$, για κάθε $x > 0$.

   i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x)\, e^{\frac{1}{x}}$$

   είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

   ii Να βρείτε την συνάρτηση f.

4. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύουν:

   - $f(0) = f'(0) = 1$
   - $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f^2(x) - \left(f'(x)\right)^2$$

   είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

   ii Να βρείτε την συνάρτηση f.

5. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν:

   - $f(0) = g(0) = 1$
   - $f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   - $g'(x) = -\dfrac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)\, g(x) = 1$$

   ii Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g.

6. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

   να αποδείξετε ότι είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

7. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

   - $f(0) = 1$
   - $f(x)\, f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) = 1$$

ii Να βρείτε την συνάρτηση f.

8. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = (0,1) \cup (1,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

   - $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$
   - $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{xlnx}$, για κάθε $x \in A$

   i Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

   $$g(x) = \frac{f(x)\,lnx}{x}$$

   ii Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $B(e,2e)$ και $\Gamma\left(\frac{1}{e}, -\frac{3}{e}\right)$, να βρείτε την συνάρτηση f.

9. Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

   i) $f'(x) = 2x + 1$ και $f(1) = 3$

   ii) $f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu 3x + 2\eta\mu 2x$ και $f(\pi) = 1$

   iii) $f'(x) = 4(x-1)\,e^{x^2-2x+1}$ και $f(1) = 2$

   iv) $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ και $f(-1) = 1$

10. Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

    $$f(1) = 3 \text{ και } f'(2x-1) = 1 + 3x \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

11. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

    - $f(0) = -2$
    - $f'\left(x^5 + x\right) = 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

    να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

12. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

    $$f'(x)\,lnx + \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ , για κάθε } x > 1$$

    Να βρείτε την συνάρτηση f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(e,e)$.

13. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

    - $f(\pi) = 2\pi$
    - $xf'(x) - f(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, για κάθε $x > 0$

    Να βρείτε την συνάρτηση f.

14. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύουν:

    - $f(1) = \dfrac{1}{2}$
    - $f'(x) = -2f^3(x)$, για κάθε $x > 0$

    Να βρείτε την συνάρτηση f.

15. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

    - $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 1$

- $\dfrac{f(x)}{f'(x)} + xlnx = 0$, για κάθε $x > 1$

Να βρείτε την συνάρτηση f, αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x - y = 1$.

16. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύουν:
    - $f(0) = 2$
    - $f(x) - f'(x) = e^{-x} f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

    Να βρείτε την συνάρτηση f.

17. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
    - $f(0) = 1$
    - $f'(x) = (x+1)^2 e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

    Να βρείτε την συνάρτηση f.

18. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
    - $f(3) = 7$
    - $(x-2) f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

    Να βρείτε την συνάρτηση f.

19. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
    - $f(1) = -1$
    - $f(x) \cdot f'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

    Να βρείτε την συνάρτηση f.

20. Να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$f'(x) = 3f(x)$$

21. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύουν:
    - $f(0) = f'(0) = 1$
    - $(f(x) + f''(x)) f'(x) = (f'(x))^2 + f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

    Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$(f'(x))^2 + f^2(x) = 2e^{2x}$$

22. Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ και για την οποία ισχύουν:
    - $f'(1) = 1$
    - $f(xy) = xf(y) + yf(x)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$

    i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:
$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$$

    ii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:
$$f(x) = xlnx$$

23. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύουν:
    - $f(0) = 0$
    - $f'(0) = 2$

- $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = f(x) + 2e^x$$

ii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = 2xe^x$$

24. Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0) = g(0)$
- $f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

25. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 2$
- $2xf(x) = \left(x^2+1\right)(f(x) - f'(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε την συνάρτηση f.

26. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = e$
- $x(f'(x) - f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \geq 0$

Να βρείτε την συνάρτηση f.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   iii) $f(x) = x + \dfrac{x+2}{x+1}$ iv) $f(x) = x\sqrt{x-1}$

   v) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ vi) $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = x^2(2lnx - 1) - 8x(lnx - 1)$ ii) $f(x) = e^{\eta\mu x}\ ,\ x \in [-\pi, \pi]$

   iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 5 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ iv) $f(x) = \begin{cases} -12(x+2)e^{-x} & , \quad x \leq 0 \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 24 & , \quad x > 0 \end{cases}$

3. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε η συνάρτηση:

   $$f(x) = 4x^3 - 3\kappa x^2 + 12x + 2$$

   να είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε η συνάρτηση:

   $$f(x) = -\frac{2x^3}{3} + 2\kappa x^2 - 2x + \kappa^2$$

   να είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   i $xe^x + 1 = e^x$

   ii $1 - lnx = x^2$

   iii $x^2 + e^{x^2-1} = 2$

   iv $2x^2 + x + 3lnx = 3$

6. Δίνεται η συνάρτηση:

   $$f(x) = ln(x-5) + 2x - 12$$

   i Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

   ii Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

   iii Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

   iv Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

   $$f(x) = 2006$$

   έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της f.

7. Θεωρούμε την συνάρτηση:

   $$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

   ii Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

   $$f(x) = 0$$

8. Θεωρούμε την συνάρτηση:

   $$f(x) = x^3 - 3x + a\ ,\ a \in \mathbb{R}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[-1, 1]$.

   ii Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$.

iii Αν $-2 < a < 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση:
$$f\left(x\right)=0$$
έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(-1,1\right).$

9. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=e^x+5x+1\ ,\ x\in\mathbb{R}$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,2\pi\right)$ την εξίσωση:
$$e^{\eta\mu x}-e^{\sigma\upsilon\nu x}=5\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)$$

10. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=\left(\frac{2}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x-1\ ,\ x\in\mathbb{R}$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$2^x+3^x+4^x=9^x$$
   έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

11. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=a^x-x\ ,\ 0<a<1\ ,\ x\in\mathbb{R}$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:
$$a^{x^2-4}-\left(x^2-4\right)=a^{x-2}-\left(x-2\right)$$

12. Έστω a,β,γ,δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=\frac{a}{x}+\frac{\beta}{x^3}+\frac{\gamma}{x^5}+\frac{\delta}{x^7}\ ,\ x\in\mathbb{R}^*$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$x^7=ax^6+\beta x^4+\gamma x^2+\delta$$
   έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

13. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=e^{2x}-2x-1\ ,\ x\in\mathbb{R}$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$e^x-e^{-x}=2xe^{-x}$$
   έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

14. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f\left(x\right)=e^x-1-ln\left(x+1\right)\ ,\ x>-1$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f' ως προς την μονοτονία.
   ii Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   iii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$$e^x=1+ln\left(x+1\right)$$
   έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(-1,+\infty\right).$

15. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:
$$x^4-8x^3+22x^2-24x+\lambda=0$$
   για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

16. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:
$$e^{\frac{a}{x}} = x^2$$
για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

17. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = x - elnx \ , \ x > 0$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Να αποδείξετε ότι:
$$\pi^e < e^\pi$$
   iii Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση:
$$f(x) = 0$$

18. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \ , \ x > 0$$
   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
   ii Από τους αριθμούς $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}$, όπου n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 2, ποιός είναι ο μεγαλύτερος;

4.6 ΚΑΝΟΝΕΣ De L'Hospital

Κανόνας 1: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και επιπλέον υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Κανόνας 2: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και επιπλέον υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{lnx}{x-1}$

   iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\eta\mu x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x-\eta\mu x}$

   v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$

   vii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}$ viii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{lnx}{e^x}$

   ix) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{lnx}{\sigma\varphi x}$ x) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2lnx}{x^3+x^2+x+1}$

   xi) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln\left(e^x+e^{-x}\right)}{x}$ xii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

   i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(xlnx)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot lnx)$

   iii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3e^x\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\varepsilon\varphi x\right]$

   v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\eta\mu^2x\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-lnx\right)$

   vii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+1-ln^2x\right)$ viii) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

   ix) $\lim\limits_{x\to 0}|\eta\mu x|^x$ x) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)^{\frac{1}{\eta\mu x}}\right]$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1+\alpha\sigma\upsilon\nu x & , \quad x\leq\dfrac{\pi}{3}\\[2ex] \beta+\eta\mu\left(\dfrac{x}{2}\right) & , \quad x>\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

   Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Έστω μία συνάρτηση f με $f\left(0\right)=0$ και $f'\left(0\right)=1$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf\left(x\right)}{\eta\mu x-xe^x}$$

5. Έστω μία συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=0$ και $f''\left(0\right)=2$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

6. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(0\right)=0$ και για την οποία ισχύει:

$$xf\left(x\right)\geq\eta\mu x \ , \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

   i Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(0\right)=1$$

   ii Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-1}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

   iii Να υπολογίσετε την τιμή $f''\left(0\right)$.

7. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-4f(x-2h)+3f(x-3h)}{h^2}=6f''(x)$$

8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=x+\eta\mu x \text{ και } g(x)=x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

 i Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

 ii Θεωρώντας γνωστό ότι το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχει, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

 iii Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

4.7 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός:

- Μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } \; x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

  Το x_0 ονομάζεται *θέση* ή *σημείο τοπικού μεγίστου*, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται *τοπικό μέγιστο* της συνάρτησης f.

- Μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } \; x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

  Το x_0 ονομάζεται *θέση* ή *σημείο τοπικού ελαχίστου*, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται *τοπικό ελάχιστο* της συνάρτησης f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης f λέγονται *τοπικά ακρότατα* της f, ενώ τα σημεία στα οποία παρουσιάζονται αυτά τα ακρότατα λέγονται *θέσεις τοπικών ακροτάτων* της f.
- Αν η ισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ή $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στην θέση x_0 *ολικό μέγιστο* ή απλά *μέγιστο* και αντίστοιχα *ολικό ελάχιστο* ή απλά *ελάχιστο*.
- Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- Ένα μέγιστο (αντίστοιχα ένα ελάχιστο) μίας συνάρτησης f είναι ταυτόχρονα και τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο) της f. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Το Θεώρημα του Fermat: Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ισχύει:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη: Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό μέγιστο, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

Έστω ότι $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Τότε $x - x_0 < 0$ και $f(x) - f(x_0) \leq 0$, οπότε $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ και κατά συνέπεια:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Έστω ότι $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Τότε $x - x_0 > 0$ και $f(x) - f(x_0) \leq 0$, οπότε $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ και κατά συνέπεια:

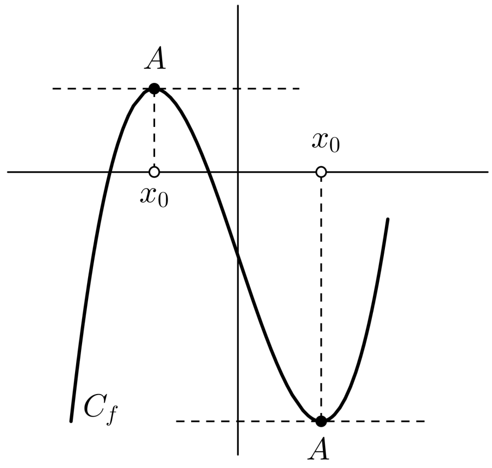
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Σύμφωνα με την (1) τα δύο παραπάνω όρια πρέπει να είναι ίσα, άρα:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Σχήμα 4.5: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat



- Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Δηλαδή αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος $\varDelta$ και ισχύει $f'\left(x_0\right)=0$, δεν σημαίνει ότι στο σημείο x_0 η συνάρτηση παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο.
- Για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$, τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος αυτού στα οποία μηδενίζεται ή δεν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης f.
- Για μία συνάρτηση f οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων σε ένα διάστημα $\varDelta$ είναι:
  1. τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.
  2. τα άκρα του διαστήματος $\varDelta$.

Θεώρημα: Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) στο οποίο η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x)>0$ στο διάστημα (a, x_0) και $f'(x)<0$ στο διάστημα (x_0, β), τότε το $f\left(x_0\right)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f.
- Αν $f'(x)<0$ στο διάστημα (a, x_0) και $f'(x)>0$ στο διάστημα (x_0, β), τότε το $f\left(x_0\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f\left(x_0\right)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

Απόδειξη:
$i)$ Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 ,η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(a, x_0]$. Επομένως για κάθε $x \in (a, x_0]$ ισχύει:

$$f(x) \leq f\left(x_0\right) \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 ,η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, \beta)$. Επομένως για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ ισχύει:

$$f(x) \leq f\left(x_0\right) \qquad (2)$$

Λόγω των σχέσεων (1) και (2) για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει:

$$f(x) \leq f\left(x_0\right)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και κατά συνέπεια είναι και τοπικό μέγιστο της f.
$iii)$ Έστω ότι για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει:

$$f'(x) > 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, θα είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.
Έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(a, x_0]$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, \beta)$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- αν $x_1 < x_0 < x_2$, όπως είδαμε προηγουμένως ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-12$ ii) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-2$

   iii) $f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$ iv) $f(x)=x^2e^x$

2. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x)=\dfrac{3lnx+1}{x^3}$ ii) $f(x)=ln\left(1+x^2\right)$

   iii) $f(x)=ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{lnx}{x+1}$ iv) $f(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{2}\ ,\ x\in[0,\pi]$

3. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-3x^2-12x+30 & , \quad x<1 \\ x^4-4x^3-8x^2+48x-20 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=ax^2-2\,(lna)\,x+1\ ,\ a\geq 1\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

   Να βρείτε την τιμή του a ώστε η τιμή του ελαχίστου της f να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

5. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε η συνάρτηση:

$$f(x)=ax^3+\beta x^2-6x+1$$

   να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=-2$. Στην συνέχεια, για τις τιμές που βρήκατε, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της.

6. Να αποδείξετε ότι:

   i Η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$$

   είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   ii Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x>0$$

   iii Η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$$

   είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Να αποδείξετε ότι:

   i Η συνάρτηση:

$$f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$$

   είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   ii Για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\geq 3x$$

8. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύουν:

$$i)\quad e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$ii)\quad ln\,(x+1)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

9. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$: ισχύουν:

$$i) \quad \eta\mu x < 2x$$

$$ii) \quad \eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \quad 2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x} \;\; , \text{ για κάθε } x \geq 1$$

$$ii) \quad ln\left(1 + x^2\right) < x \;\; , \text{ για κάθε } x > 0$$

$$iii) \quad x + 2 + (x - 2)\, e^x > 0 \;\; , \text{ για κάθε } x > 0$$

$$iv) \quad e^x > 1 + ln\,(1 + x) \;\; , \text{ για κάθε } x > 0$$

11. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ και για τις οποίες ισχύει:

$$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x \;\; , \text{ για κάθε } x \geq 0$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$$

12. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = e^x (1 - x) - 1\;,\; x < 1$$

  i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

  ii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < 1$ ισχύει:

$$e^x \leq \frac{1}{1 - x}$$

  iii Αν $\beta < a < 0$, να αποδείξετε ότι:

$$ln\left(\frac{1 - \beta}{1 - a}\right) < a - \beta$$

13. Αν $0 < a \neq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^x \geq x + 1$$

να αποδείξετε ότι $a = e$.

14. Αν $0 < a \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$a^x \geq x^a$$

να αποδείξετε ότι $a = e$.

15. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a και β ισχύει:

$$a^x + \beta^x \geq 2 \;\; , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι $a\beta = 1$.

16. Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + 2 \leq e^x + 2\sigma\upsilon\nu x \;\; , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$.

17. Έστω n θετικός ακέραιος. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = x^{-n} e^x\;,\; x \in \mathbb{R}$$

  i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$e^x \geq \left(\frac{ex}{n}\right)^n$$

iii Έστω $0 < a \neq 1$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$a^x \geq \left(\frac{ax}{n}\right)^n$$

να αποδείξετε ότι $a = e$.

18. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2f^3\left(x\right) + 6f\left(x\right) = 2x^3 + 6x + 1 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

19. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3\left(x\right) + 8f\left(x\right) = \left(x-1\right)e^x - \frac{x^2}{2} + 1 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

20. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5\left(x\right) + f^3\left(x\right) + f\left(x\right) = e^x - e^{-x} - 2x \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

21. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $a, \beta > 0$ με $a < \beta$ τέτοιοι ώστε:

$$af'\left(a\right) + \beta f'\left(\beta\right) = 0$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$.

22. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3\left(x\right) + 3f\left(x\right) = 3x \cdot \eta\mu 2x \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 0$ τοπικό ελάχιστο.

23. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'\left(x\right) + \left(x-2\right)\left(f^2\left(x\right) + 3\right) = 0 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο και να καθορίσετε το είδος του ακροτάτου.

24. Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$f^3\left(x\right) + \beta f^2\left(x\right) + \gamma f\left(x\right) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

ii Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(x\right) = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0, 1\right)$.

25. Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$2f\left(x\right) \leq f\left(1\right) + f\left(2\right) \ \ , \ \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i $f\left(1\right) = f\left(2\right)$.

ii $f'\left(1\right) = f'\left(2\right) = 0$.

iii Η εξίσωση:

$$f'(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

iv Η εξίσωση:

$$f''(x) = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1, 2)$.

26. Έστω μία συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 2]$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = f(2) = 0$
- $f(1) = 3$
- $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, 2)$.

ii Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

4.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

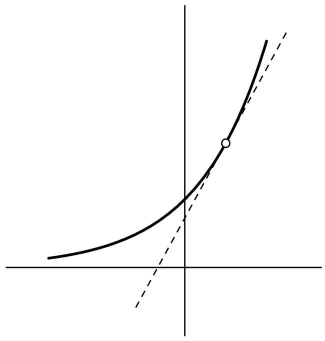
Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f *στρέφει τα κοίλα προς τα άνω* στο διάστημα Δ ή ότι είναι *κυρτή* στο διάστημα Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f *στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω* στο διάστημα Δ ή ότι είναι *κοίλη* στο διάστημα Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Γεωμετρική ερμηνεία:

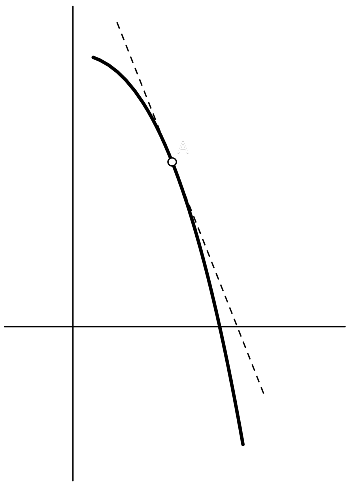
- Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f.

Σχήμα 4.6: Σε μία κυρτή συνάρτηση η εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση



- Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f.

Σχήμα 4.7: Σε μία κοίλη συνάρτηση η εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση



Πρόταση: Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

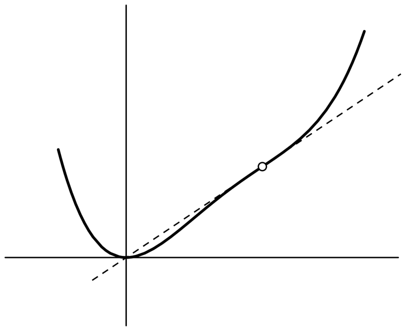
- Αν $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα Δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ χωρίς η δεύτερη παράγωγός της να είναι θετική ή αρνητική σε όλα τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ. Στην πραγματικότητα αν μία συνάρτηση f, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ, είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ, τότε ισχύει $f''(x) \geq 0$ ή $f''(x) \leq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, με τον μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου να συμβαίνει ενδεχομένως σε μεμονωμένα σημεία του διαστήματος Δ.

Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η συνάρτηση f αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του σημείου x_0 και η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο A ονομάζεται *σημείο καμπής* της γραφικής παράστασης της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Γεωμετρική ερμηνεία: Στο σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f, η εφαπτομένη διαπερνά την C_f.

Σχήμα 4.8: Στο σημείο καμπής η εφαπτομένη διαπερνά την γραφική παράσταση



Πρόταση: Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f, και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ισχύει:

$$f''(x_0) = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Δηλαδή αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος και ισχύει $f''(x_0) = 0$, δεν σημαίνει ότι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
- Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι:
  1. τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία μηδενίζεται η f''.
  2. τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία δεν ορίζεται η f''.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα σημεία καμπής τους.

   i) $f\left(x\right)=3x^5-5x^4+2$ ii) $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2-2}{x^3}$

   iii) $f\left(x\right)=x^2e^x$ iv) $f\left(x\right)=x^2\left(2lnx-5\right)$

   v) $f\left(x\right)=\dfrac{3lnx+1}{x^3}$ vi) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}lnx-\dfrac{3x^2}{4}$

2. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-3x^2+1 & , \quad x<0\\ -x^3+3x^2+1 & , \quad x\geq 0\end{cases}$$

3. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ και λ με $\kappa<\lambda$ και η συνάρτηση :

$$f\left(x\right)=\left(x-\kappa\right)^5\left(x-\lambda\right)^3 \ , \ x\in\mathbb{R}$$

   Να αποδείξετε ότι:

   i $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$, για κάθε $x\neq\kappa$ και $x\neq\lambda$.

   ii Η συνάρτηση:

$$g\left(x\right)=ln\left|f\left(x\right)\right|$$

   στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $\left(\kappa,\lambda\right)$.

4. Αν η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=x^4+ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

   έχει δύο διαφορετικά σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $3a^2>8\beta$.

5. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=x^4+2\kappa x^3+6x^2+3x+2$$

   να είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

6. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a και β ώστε η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=ax^3+\beta x^2-36x+5$$

   να έχει στο σημείο $x_0=3$ τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση να έχει σημείο καμπής το $M\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=-ln\left(lnx\right)$$

   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

   ii Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M\left(e,0\right)$.

   iii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει:

$$eln\left(lnx\right)\leq x-e$$

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=xlnx$$

   i Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

   ii Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M\left(1,0\right)$.

   iii Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$lnx\geq 1-\frac{1}{x}$$

iv Αν για τους θετικούς αριθμούς a, β, γ ισχύει $a\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3$$

9. Έστω μία συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 = 5f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι το διάγραμμα της f δεν έχει σημεία καμπής.

10. Δίνεται μία συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) \neq 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε ακόμα μία συνάρτηση g που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$g(x) f'(x) = 2f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

11. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f''(x) < 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = e^{-f(x)}$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

12. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ακρότατο ίσο με 0 και επιπλέον ισχύει:

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i Η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) e^{-2x} \, , \; x \in \mathbb{R}$$

είναι κυρτή.

ii $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x-2) f''(x) = \eta\mu(2x-4) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(2, f(2))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f.

14. i Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία μόνο θέση ελαχίστου στο διάστημα (a, β) και ότι έχει μέγιστο στα σημεία $x_1 = a$ και $x_2 = \beta$.

ii Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2 - 4x + 6\right) e^x + 3(2-e)x - 1 \, , \; x \in \mathbb{R}$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[0, 1]$.

15. Έστω μία συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

i Για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$$

ii

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$$

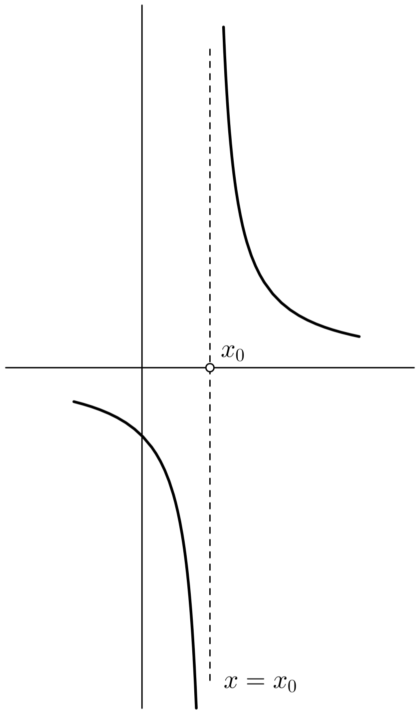
iii Αν $f(a) = a$ και $f(\beta) = \beta$, τότε για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει:

$$f(x) \leq x$$

4.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Ορισμός: Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται *κατακόρυφη ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ή $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι ίσο με $-\infty$ ή $+\infty$.

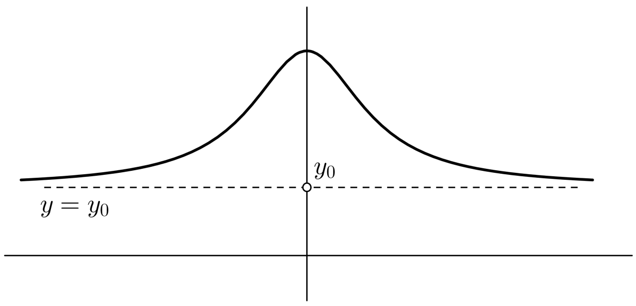
Σχήμα 4.9: Κατακόρυφη ασύμπτωτη



Παρατηρηση:
Κατακόρυφες ασύμπτωτες στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f αναζητούμε σε ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της και σε σημεία που η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Ορισμός: Η ευθεία $y = y_0$ λέγεται *οριζόντια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ή $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ είναι ίσο με y_0.

Σχήμα 4.10: Οριζόντια ασύμπτωτη



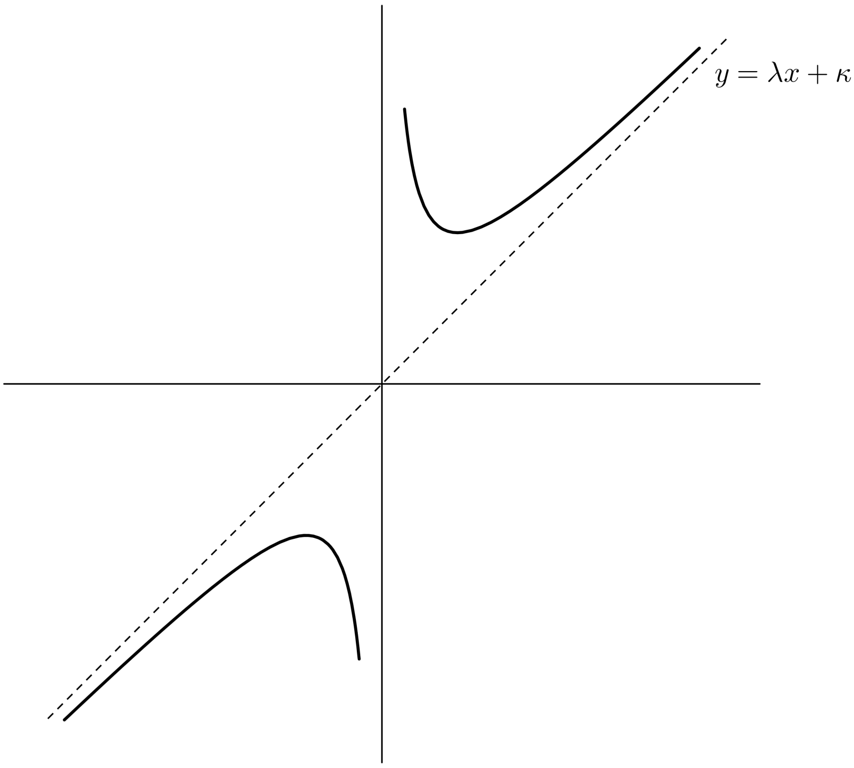
Ορισμός: Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ λέγεται *πλάγια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ όταν ισχύει:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (\lambda x + \kappa)) = 0$$

ή αντίστοιχα

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\lambda x + \kappa)) = 0$$

Σχήμα 4.11: Πλάγια ασύμπτωτη



Πρόταση: Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f στο $-\infty$ ή στο $+\infty$, αν και μόνο αν ισχύουν:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$

και

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \lambda x) = \kappa$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Για να αναζητήσουμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f πρέπει το πεδίο ορισμού της f να περιέχει περιοχή του $-\infty$ ή του $+\infty$.
- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2 δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.
- Κάθε ρητή συνάρτηση όπου ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι κατά δύο τουλάχιστον μονάδες μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ ii) $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$

   iii) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ iv) $f(x) = xe^{-x}$

   v) $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|-1}$ vi) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

2. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{x^2+x+2a}{x-a^4} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε την τιμή του a ώστε η ευθεία $x=1$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{2x^2+(a+1)x-2}{x-1} \quad , \quad x \neq 1 \; , \; a \in \mathbb{R}$$
   Να βρείτε την τιμή του a ώστε η ευθεία $y=2x-5$ να είναι ασύμπτωτη της C_f καθώς $x \to +\infty$.

4. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x+5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f καθώς $x \to +\infty$.

   i Να υπολογίσετε τα όρια:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$$
   ii Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x} = 1$$

5. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = x + \frac{\eta\mu x}{e^x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$
   i Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

   ii Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y=x$ άπειρα κοινά σημεία.

6. Να βρείτε τους ακέραιους κ και λ για τους οποίους η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f(x) = \frac{\kappa x^3+\lambda x^2-x-2}{x^2-1}$$
   δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

4.10 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+x}$$
2. Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f\left(x\right)=\frac{1-2x}{x^2}$$
3. Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f\left(x\right)=\frac{lnx}{x}$$
4. Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f\left(x\right)=x+\eta\mu x\ ,\ x\in\left[-\pi,\pi\right]$$

Κεφάλαιο 5

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

5.1 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. *Αρχική συνάρτηση* ή *παράγουσα* της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$F'(x) = f(x)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

Θεώρημα: Έστω μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής:
  $$G(x) = F(x) + c \ , \ \ c \in \mathbb{R}$$
  είναι παράγουσες της f στο Δ.
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή:
  $$G(x) = F(x) + c \ , \ \ c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση G είναι μία παράγουσα της f στο Δ αφού για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

Έστω G μία ακόμη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν:

$$G'(x) = f(x) \ \text{ και } \ F'(x) = f(x)$$

Άρα:

$$G'(x) = F'(x)$$

Επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$G(x) = F(x) + c$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συνάρτηση	Αρχική συνάρτηση
0	c
1	$x+c$
$\frac{1}{x}$	$ln\left\|x\right\|+c$
x^a, $a\neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+c$
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$-\sigma\varphi x+c$
e^x	e^x+c
a^x, $0<a\neq 1$	$\frac{a^x}{lna}+c$

Συνάρτηση	Αρχική συνάρτηση
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\left\|f(x)\right\|+c$
$f^k(x)\cdot f'(x)$, $k\neq -1$	$\frac{f^{k+1}(x)}{k+1}+c$
$\sigma\upsilon\nu(f(x))\cdot f'(x)$	$\eta\mu(f(x))+c$
$\eta\mu(f(x))\cdot f'(x)$	$-\sigma\upsilon\nu(f(x))+c$
$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(f(x))}$	$\varepsilon\varphi(f(x))+c$
$\frac{f'(x)}{\eta\mu^2(f(x))}$	$-\sigma\varphi(f(x))+c$
$e^{f(x)}\cdot f'(x)$	$e^{f(x)}+c$
$a^{f(x)}\cdot f'(x)$, $0<a\neq -1$	$\frac{a^{f(x)}}{lna}+c$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)}+c$
$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$f(x)\cdot g(x)+c$
$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)}+c$
$f'(g(x))\cdot g'(x)$	$f(g(x))+c$

Πρόταση: Αν F και G είναι παράγουσες των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- Η συνάρτηση λF, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, είναι μία παράγουσα της συνάρτησης λf στο Δ.
- Η συνάρτηση $F+G$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ στο Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 1$ ii) $f(x) = \eta\mu x - 7e^x$

   iii) $f(x) = x^3 + 2$ iv) $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x > 0$

   v) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$ vi) $f(x) = 2e^x - \frac{3}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x \in (0, \pi)$

   vii) $f(x) = 3^x + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ viii) $f(x) = \frac{(2x-3)^2}{x^2}$

   ix) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$ x) $f(x) = e^x + xe^x$

   xi) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - 2\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x$ xii) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x}{x^2}$

2. Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) $f(x) = \frac{1 - lnx}{x^2}$ ii) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$

   iii) $f(x) = \left(2x + x^2\right) e^x$ iv) $f(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x \in (0, \pi)$

   v) $f(x) = \frac{lnx - 1}{ln^2 x}$ vi) $f(x) = -\varepsilon\varphi^2 x\ ,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

   vii) $f(x) = \eta\mu^{10} x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ viii) $f(x) = 8x\left(4x^2 + 1\right)^5$

   ix) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1 + \eta\mu x)^4}\ ,\ x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ x) $f(x) = \frac{1 + e^x}{x + e^x}$

   xi) $f(x) = \varepsilon\varphi x\ ,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ xii) $f(x) = 3xe^{x^2}$

   xiii) $f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ xiv) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

3. Να βρείτε την συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

   i) $f'(x) = (2x+1)(3x-1)$ και $f(0) = 1$

   ii) $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x + 1$ και $f(\pi) = \pi$

   iii) $f'(x) = 9x^2 e^{x^3} - 1$ και $f(0) = 1$

   iv) $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$ και $f(0) = -1$

   v) $f'(x) = e^{-x}$ και $f(0) = 0$

   vi) $f'(x) = -\frac{2x\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}$ και $f(\pi) = \frac{1}{\pi}\ ,\ f(-\pi) = -\frac{1}{\pi}$

   vii) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ και $f(-1) = 1\ ,\ f(1) = 2$

4. Να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, για την οποία ισχύει:

$$xf'(x) = x^2 + 2f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x > 0$$

5. Να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ και για την οποία ισχύει:

$$f'(x)\,\eta\mu x = e^x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

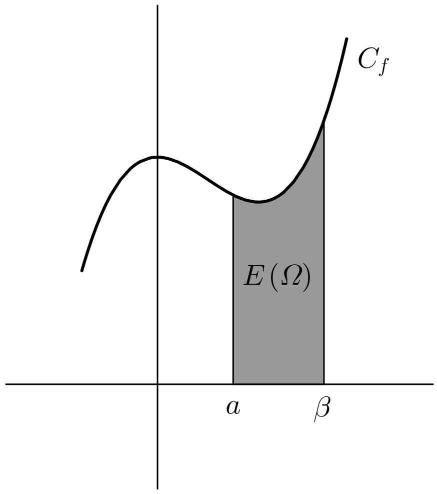
6. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

   i Να αποδείξετε ότι:
$$f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

   ii Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

   iii Να βρείτε μία αρχική της συνάρτησης:
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

5.2 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ ισούται με το *ορισμένο ολοκλήρωμα* της f από το a έως το β και συμβολίζεται:

$$E(\Omega)=\int_a^\beta f(x)\,dx$$

Ιδιοτητες:
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στα διαστήματα ολοκλήρωσης, τότε ισχύουν:

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int_a^\beta f(x)\,dx=-\int_\beta^a f(x)\,dx$
- $\int_a^\beta f(x)\,dx=\int_a^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$
- $\int_a^\beta \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^\beta f(x)\,dx$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$
- $\int_a^\beta (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^\beta f(x)\,dx+\int_a^\beta g(x)\,dx$
- Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ και η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε:
  $$\int_a^\beta f(x)\,dx>0$$
- Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ και οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο διάστημα $[a,\beta]$, τότε:
  $$\int_a^\beta f(x)\,dx>\int_a^\beta g(x)\,dx$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (Μορφή 1):
Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (Μορφή 2):
Έστω μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(a) = [G(x)]_a^\beta$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα $[a,\beta]$. Επειδή και η G είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα $[a,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x) = F(x) + c$$

Από την παραπάνω σχέση για $x = a$ έχουμε:

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)\,dt + c = c$$

Άρα,

$$G(x) = F(x) + G(a)$$

Από την παραπάνω σχέση για $x = \beta$ έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t)\,dt + G(a)$$

Συνεπώς,

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(a)$$

Πρόταση: (Η παραγοντική ολοκλήρωση)
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς πρώτες παραγώγους στο διάστημα $[a,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)\,g(x)\,dx$$

Πρόταση: (Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής)
Αν η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[a,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du$$

όπου $u_1 = g(a)$ και $u_2 = g(\beta)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\int_0^3 f(x)\ dx = 5\ ,\ \int_3^8 f(x)\ dx = 10 \text{ και } \int_2^8 f(x)\ dx = 12$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^8 f(x)\ dx\ ,\ \int_0^2 f(x)\ dx \text{ και } \int_2^3 f(x)\ dx$$

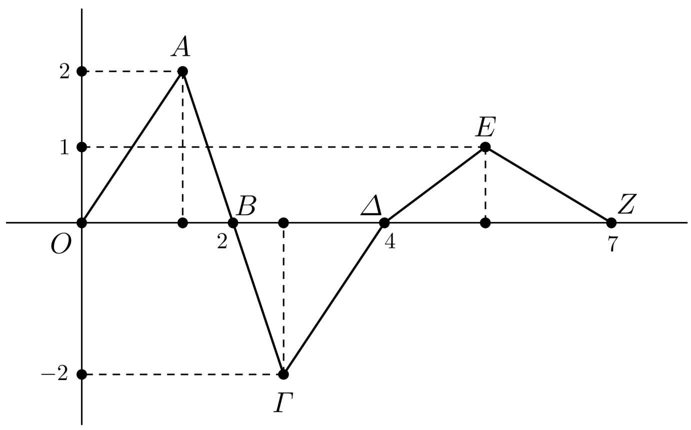
2. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\int_3^5 f(x)\ dx = 4\ ,\ \int_7^9 f(x)\ dx = 6 \text{ και } \int_5^9 f(x)\ dx = 13$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_3^9 f(x)\ dx\ ,\ \int_5^7 f(x)\ dx \text{ και } \int_7^3 f(x)\ dx$$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f :



Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^2 f(x)\ dx\ ,\ \int_0^4 f(x)\ dx \text{ και } \int_2^7 f(x)\ dx$$

4. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\int_1^x (x-2)\ dt + \int_x^1 (2x-5)\ dt = 0$$

5. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού a για τον οποίον ισχύει:

$$\int_{6a}^{a^2+4} \frac{2^{x+1}}{1+2^x}\ dx = \int_{a^2+4}^{6a} \frac{2}{1+2^x}\ dx - 8$$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+5x-4\right)\ dx$ ii) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x^3+x+1}{x}\ dx$

iii) $\displaystyle\int_0^1 2e^{2x+1}\ dx$ iv) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\ dx$

v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\ dx$ vi) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\ dx$

vii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \eta\mu^4 x\cdot\sigma\upsilon\nu x\ dx$ viii) $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}\ dx$

ix) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\ dx$ x) $\displaystyle\int_0^{ln2} \frac{e^x}{e^x+1}\ dx$

xi) $\displaystyle\int_0^3 \left|1-x^2\right|\ dx$ xii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x}\ dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-2}\ dx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2-4x+1}{x-2}\ dx$ iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-2}{x^2-4}\ dx$

iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+5}{x+2}\ dx$ v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x-6}\ dx$

8. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\sqrt{1+x^2}+\lambda x\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

i Να βρείτε τον λ ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=1$$

ii Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{x}{f^2\left(x\right)}\ dx$$

9. Να βρείτε μία πολυωνυμική συνάρτηση δεύτερου βαθμού η οποία να παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ και επιπλέον να ισχύει:

$$\int_0^1 f\left(x\right)\ dx=0$$

10. Να βρείτε μία περιττή πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού για την οποία να ισχύουν:

$$f'\left(1\right)=4\ \text{ και }\ \int_0^1 f\left(x\right)\ dx=-3$$

11. Έστω $\lambda>0$. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν ισχύει:

$$\int_0^{\lambda} 2xe^x\ dx=\int_{\lambda}^0 x^2e^x\ dx+4e^{\lambda}$$

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και ισχύουν:

- $f\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$
- $\displaystyle\int_a^{\beta}\left(\int_a^{\beta} f\left(t\right)\ dt\right)f\left(x\right)\ dx=\int_a^{\beta} f\left(x\right)\ dx+2$

να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_a^{\beta} f\left(x\right)\ dx$

13. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(x\right)=2x+\int_0^2 f\left(x\right)\ dx$$

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^2 xe^x\, dx$

ii) $\int_0^1 xe^{-2x}\, dx$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\, dx$

iv) $\int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 3x\, dx$

v) $\int_1^e lnx\, dx$

vi) $\int_0^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x\, dx$

vii) $\int_1^e xlnx\, dx$

viii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\eta\mu 2x\, dx$

ix) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\, dx$

x) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu x\, dx$

xi) $\int_1^e \eta\mu\left(lnx\right)\, dx$

15. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύουν:

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f\left(x\right) + f''\left(x\right)\right)\sigma\upsilon\nu x\, dx = 2$

να υπολογίσετε την τιμή $f'\left(0\right)$.

16. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύουν:

- $f'\left(1\right) = 3$
- $\int_0^1 x^3 f''\left(x\right)\, dx = 6\int_0^1 xf\left(x\right)\, dx$

να υπολογίσετε την τιμή $f\left(1\right)$.

17. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής, έχει δεύτερη συνεχή παράγωγο και είναι και περιττή στο διάστημα $[-2,2]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-2}^{2} \left(x^2 f''\left(x\right) - 2f\left(x\right)\right) dx = 0$$

18. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(x\right) = e^x + \int_0^1 xf\left(x\right)\, dx$$

19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^1 x^2 e^{x^3}\, dx$

ii) $\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\, dx$

iii) $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx$

iv) $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\, dx$

v) $\int_e^{e^2} \frac{1}{xlnx}\, dx$

vi) $\int_0^{\pi} \eta\mu\left(\sqrt{x}\right)\, dx$

vii) $\int_0^1 x\sqrt{x+2}\, dx$

viii) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\, dx$

ix) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$

x) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx$

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = e^x + x - 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

i Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

ii Θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^e f^{-1}(x)\ dx$$

21. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, ισχύει:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$$

ii Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, ισχύει:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

iii Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{2+\sigma\upsilon\nu x}\ dx$$

22. Θεωρούμε μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ με:

$$f(x) + f(a+\beta-x) = c\ ,\ \text{για κάθε } x \in [a, \beta]$$

όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

i Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(x)\ dx = (\beta-a)\, f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-a}{2}\left(f(a)+f(\beta)\right)$$

ii Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^4 \frac{1}{4+2^x}\ dx$$

23. Θεωρούμε μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, a]$.

i Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a-x)\ dx$$

ii Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}\ dx$$

24. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2\sigma\upsilon\nu x}{2^x+1}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

i Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = x^2\sigma\upsilon\nu x$$

ii Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$$

25. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4}{3} < \int_{-2}^2 \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\ dx < 12$$

26. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\ dx > \frac{\pi}{2}$$

27. Να αποδείξετε ότι:
$$\sqrt{e} < \int_1^2 \sqrt{e^x}\, dx < e$$

28. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{lnx}{x}\ ,\ x > 0$$
Να αποδείξετε ότι:
   i $f(x) \leq \frac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$.
   ii $\int_1^e x^e\, dx \leq \int_1^e e^x\, dx$

29. Να αποδείξετε ότι:
   i $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, για κάθε $x \in [0,1]$.
   ii Για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:
$$\frac{1}{2(\nu+1)} < \int_0^1 \frac{x^\nu}{1+x^2}\, dx < \frac{1}{\nu+1}$$

30. Θεωρούμε την συνάρτηση:
$$f(x) = 5^x - ax - 1\ ,\ a \in \mathbb{R}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$
Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0$, να αποδείξετε ότι:
   i $a = ln5$.
   ii $\int_0^1 5^{1+x^2}\, dx > \frac{4ln5}{3} + 1$

31. i Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:
$$\left| \int_a^\beta f(x)\ dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|\ dx$$
   ii Να αποδείξετε ότι:
$$\left| \int_1^2 \frac{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\, dx \right| < \frac{1}{2}$$

32. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ με:
$$f(x) \neq 0\ \ ,\ \text{για κάθε } x \in [a,\beta]$$
Να αποδείξετε ότι:
$$2(\beta - a) \leq \int_a^\beta f^2(x)\ dx + \int_a^\beta \frac{1}{f^2(x)}\, dx$$

33. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [a,\beta] \to \mathbb{R}$. Ξεκινώντας από την ανισότητα:
$$(f(x) + \kappa g(x))^2 \geq 0$$
να αποδείξετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:
$$\left(\int_a^\beta f(x)\, g(x)\ dx \right)^2 \leq \left(\int_a^\beta f^2(x)\ dx \right) \left(\int_a^\beta g^2(x)\ dx \right)$$

5.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από:

   i Την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 4x$ και τον άξονα $x'x$.

   ii Την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{lnx}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

   iii Την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

   iv Την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 18x + 24$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από:

   i Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

   $$f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 1 \text{ και } g(x) = 3x^2 - x + 1$$

   ii Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

   $$f(x) = 3x^3 - x^2 - x + 1 \text{ και } g(x) = 1 + 3x - x^2 - x^3$$

   iii Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

   $$f(x) = x^2 + 5x + 1\ ,\ g(x) = 4x^2 - x + 1$$

   και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 3$.

   iv Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

   $$f(x) = e^{2x-1} - e^x + 2 \text{ και } g(x) = 1 + e^{x-1}$$

   v Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

   $$f(x) = 2x\ ,\ g(x) = \eta\mu x$$

   και τις ευθείες $x = -\pi$ και $x = \pi$.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση:

   $$f(x) = (x+4)\,e^{-x}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

   Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται ως εξής: $-1 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq f(x)$.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2x}$, την εφαπτομένη της στο σημείο της $A(1, f(1))$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την παραβολή $y = \dfrac{x^2}{4}$ και τις εφαπτομένες που άγονται προς αυτήν από το σημείο $A(3, -4)$.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y^2 = 2x$ και $y^2 = x + 2$.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

   $$f(x) = x^2 + 2\ ,\ g(x) = \frac{x^2}{8}$$

   και τις ευθείες $y = 2$ και $y = 6$ για $x \geq 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση:

   $$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2}\ ,\ x \neq 0$$

   i Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του επίπεδου χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda \neq 1$.

ii Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει $E(\lambda) = 3$.

iii Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda) \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$$

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \; , \; x \geq 1$$

i Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.

ii Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

iii Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.