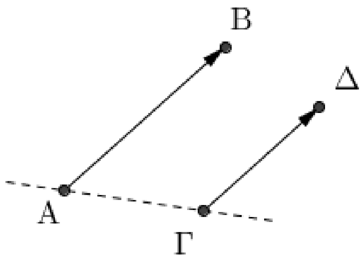
# 1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

## 1.1 Ορισμός και ισότητα διανυσμάτων

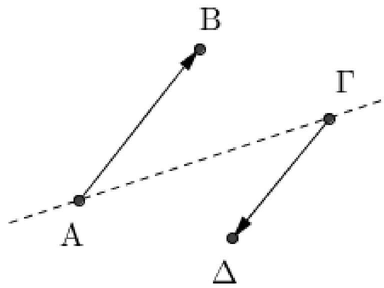
**Ορισμός:** Ονομάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $AB$ που έχει αρχή το σημείο $A$ και τέλος το σημείο $B$.
Αν η αρχή και το τέλος του διανύσματος συμπίπτουν το διάνυσμα ονομάζεται μηδενικό και συμβολίζουμε $\overrightarrow{0}$.

Αν έχουμε δύο διαφορετικά σημεία $A$ και $B$ στο επίπεδο, αυτά ορίζουν την θέση μιας ευθείας, της ευθείας $AB$. Η ευθεία αυτή και κάθε παράλληλή της ορίζουν στο επίπεδο μία διεύθυνση. Διανύσματα που ανήκουν στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες λέμε ότι είναι **παράλληλα** ή ότι είναι **συγγραμμικά**. Θα συμβολίζουμε: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Έστω δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Αν η ευθεία $A\Gamma$ αφήνει τα διανύσματα στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την ίδια φορά, είναι **ομόρροπα** και συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Αν η ευθεία $A\Gamma$ τα αφήνει σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, τότε λέμε ότι έχουν αντίθετη φορά, είναι **αντίρροπα** και συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \nearrow\swarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.




*τα διανύσματα είναι ομόρροπα*




*τα διανύσματα είναι αντίρροπα*

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $AB$ το ονομάζουμε **μέτρο** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζουμε $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Προφανώς ισχύουν:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \geq 0$$

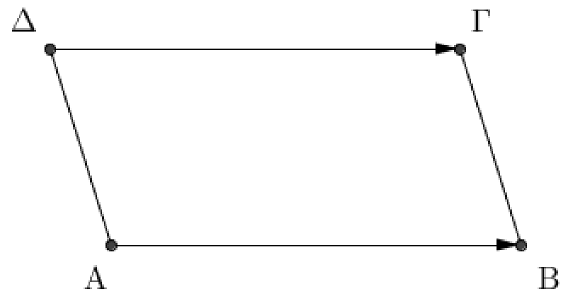
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

| |
|---|
| Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν είναι παράλληλα, είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα. |

Στηριζόμενοι στην ισότητα διανυσμάτων, όπως διατυπώθηκε παραπάνω, έχουμε την παρακάτω βασική πρόταση:

$$AB\Gamma\Delta \text{ παραλληλόγραμμο } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

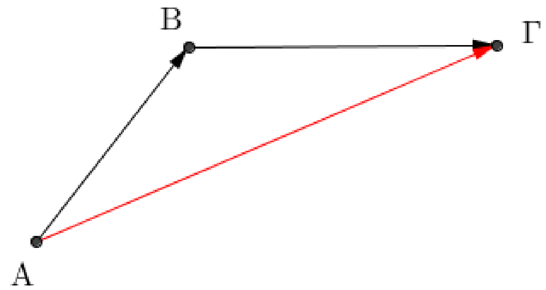



Και κατά συνέπεια:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\varDelta\varGamma} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\varGamma\varDelta}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\varDelta\varGamma} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{A\varDelta} = \overrightarrow{B\varGamma}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\varDelta\varGamma} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{\varDelta A} = \overrightarrow{\varGamma B}$$

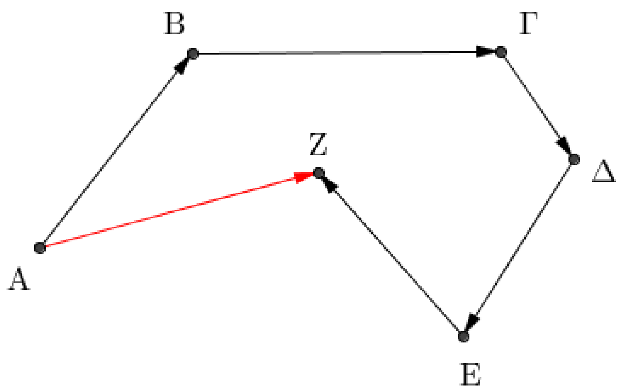
## 1.2 Πρόσθεση διανυσμάτων

Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα πρέπει να τα τοποθετήσουμε έτσι ώστε το τέλος του πρώτου να συμπίπτει με την αρχή του δεύτερου. Το άθροισμά τους τότε έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και ως τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος.



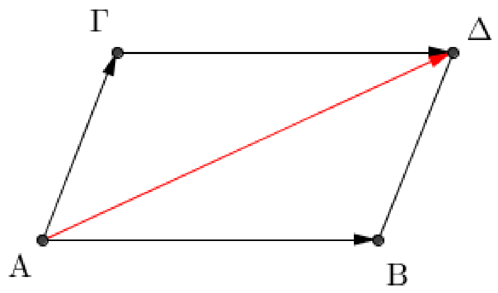

Δηλαδή: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\varGamma} = \overrightarrow{A\varGamma}$

Την ίδια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε αν έχουμε και περισσότερα διανύσματα να προσθέσουμε.




$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\varGamma} + \overrightarrow{\varGamma\varDelta} + \overrightarrow{\varDelta E} + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ}$$

Μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα τοποθετώντας τα σε κοινή αρχή χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου ως εξής:




$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$$

*Εξήγηση:* Λόγω του παραλληλογράμμου, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, οπότε:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$$

Η πρόσθεση διανυσμάτων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

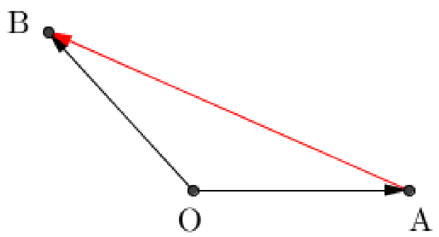
*i)* Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύει: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{a}$

*ii)* Για τρία διανύσματα $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\gamma}$ ισχύει: $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\beta}\right) + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}\right)$

*iii)* Για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ ισχύει: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

*iv)* Για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ υπάρχει ένα διάνυσμα που ονομάζεται **αντίθετο** του $\overrightarrow{a}$, συμβολίζεται $-\overrightarrow{a}$ για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
Το αντίθετο διάνυσμα $-\overrightarrow{a}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{a}$, έχει αντίθετη φορά και ίσο μέτρο με αυτό.

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:




$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}\\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

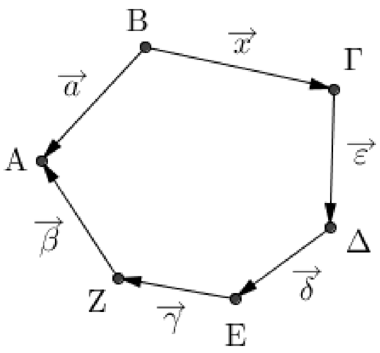
1. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε το κέντρο του O. Να συμπληρώσετε τις ισότητες που ακολουθούν:

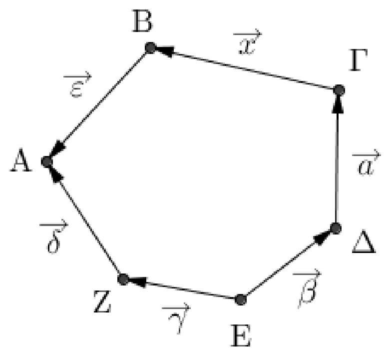
   $i)\ \overrightarrow{AO} + \ldots = \overrightarrow{AB}$ $\quad ii)\ \ldots + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ $\quad iii)\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \ldots$

   $iv)\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} = \ldots$ $\quad v)\ \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \ldots$ $\quad vi)\ \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{\Gamma O} = \ldots$

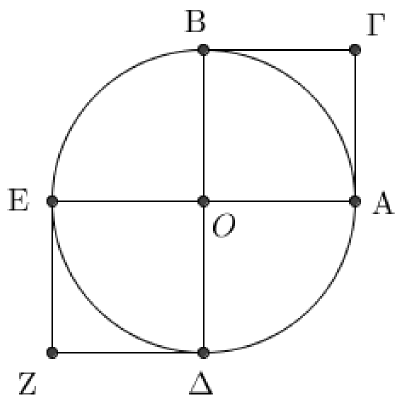
   $vii)\ \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma B} + \ldots = \overrightarrow{0}$ $\quad viii)\ \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} - \ldots = \overrightarrow{0}$

2. Να εκφράσετε το άγνωστο διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ στα παρακάτω πολύγωνα με την βοήθεια των άλλων διανυσμάτων που σημειώνονται.




3. Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα $OA\Gamma B$ και $O\Delta ZE$ είναι τετράγωνα.




   Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

   $i)\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} = \ldots$ $\quad ii)\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} + \ldots = \overrightarrow{0}$ $\quad iii)\ \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta Z} = \ldots$

   $iv)\ \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BO} = \ldots$ $\quad v)\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \ldots = \overrightarrow{0}$ $\quad vi)\ \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{ZE} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{Z\Delta} = \ldots$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

   $i)\ -\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{B\Delta}$ $\quad ii)\ \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{B\Delta}$ $\quad iii)\ \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Gamma B}$

5. Για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E$ ισχύει:
$$\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE}$$
Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\Gamma$ και $\Delta$ ταυτίζονται.

6. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και ένα τυχαίο σημείο $M$ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι:
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{0}$$

7. Θεωρούμε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και το μέσον $M$ της διαγωνίου $A\Gamma$. Να δείξετε ότι:
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

8. Να αποδείξετε ότι σε οποιοδήποτε πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ ισχύει:
$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$$

9. Για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, M, \Sigma$ ισχύει ότι:
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{M\Sigma} = \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{\Delta\Sigma}$$
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως των κορυφών του $A, B, \Gamma, \Delta$ ως προς ένα σημείο αναφοράς $O$. Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

    (α′) αν ισχύει $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\delta}$

    (β′) αν ισχύει $\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = \left|\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}\right|$

    (γ′) αν ισχύει $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\delta}$ και $\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = \left|\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}\right|$

11. Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στο εξωτερικό των πλευρών του κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $AB\Theta I$, $B\Gamma ZH$ και $A\Gamma E\Delta$. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

    (α′) $\overrightarrow{I\Delta} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{H\Theta}$

    (β′) $\overrightarrow{I\Theta} + \overrightarrow{HZ} + \overrightarrow{E\Delta}$

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στο εξωτερικό των πλευρών του $A\Gamma$ και $B\Gamma$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $A\Gamma\Delta E$ και $B\Gamma HZ$. Να αποδείξετε ότι:

    (α′) $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Delta H} + \overrightarrow{AB}$

    (β′) $\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{\Gamma Z} + \overrightarrow{AH}$

13. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ που είναι κάθετα. Να αποδείξετε ότι:
$$\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right|$$

## 1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

**Ορισμός:** Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ και ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός $\lambda$. Ονομάζουμε γινόμενο του αριθμού $\lambda$ με το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ και συμβολίζουμε $\lambda\overrightarrow{a}$, ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$.
- είναι ομόρροπο του διανύσματος $\overrightarrow{a}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του διανύσματος $\overrightarrow{a}$ αν $\lambda < 0$.
- έχει μέτρο ίσο με $|\lambda|\,|\overrightarrow{a}|$.

Επίσης ορίζουμε: $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ και $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
i) &\quad \lambda\,(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\,\overrightarrow{a}\\
ii) &\quad (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}\\
iii) &\quad \lambda\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\beta}\right) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{\beta}\\
iv) &\quad \lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \text{ ή } \ \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}\\
v) &\quad \text{Αν } \lambda\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{\beta} \text{ και } \lambda \neq 0, \text{ τότε } \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\beta}\\
vi) &\quad \text{Αν } \lambda\overrightarrow{a} = \mu\overrightarrow{a} \text{ και } \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}, \text{ τότε } \lambda = \mu
\end{aligned}$$

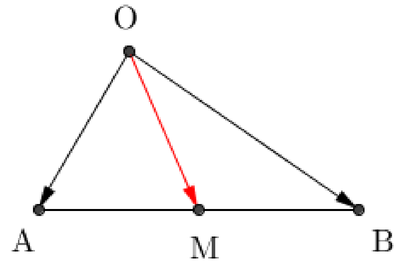
**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ δύο διανύσματα με $\overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ ώστε } \ \overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{\beta}$$

**Πρόταση:** Έστω ευθύγραμμο τμήμα $AB$ και $M$ το μέσον του. Για οποιοδήποτε σημείο $O$ ισχύει:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

*Απόδειξη:*




Ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και αφού τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BM}$ είναι αντίθετα έχουμε:

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

14. Στην πλευρά $AB$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα σημεία $E$ και $Z$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{ZB}$. Να δείξετε ότι:
$$\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{\Delta Z}=2\overrightarrow{\Gamma B}$$

15. Σε κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$, να δείξετε ότι:
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AZ}=2\overrightarrow{A\Delta}$$
(Να θεωρήσετε γνωστό ότι σε κάθε κανονικό εξάγωνο οι πλευρές είναι ίσες και οι απέναντι πλευρές παράλληλες).

16. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα μέσα $E, Z$ των πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$$

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $O$ το κέντρο του. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο $M$ ισχύει:
$$4\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}$$

18. Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ και $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ και έστω $O_1$, $O_2$ τα κέντρα τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
$$4\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}+\overrightarrow{\Delta_1\Delta_2}$$

19. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα $K, \Lambda, M$ των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο $O$ ισχύει:
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM}$$

20. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Θεωρούμε σημείο $M$ της $A\Delta$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{0}$. Αν $K, \Lambda, N$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
$$2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{M\Lambda}+\overrightarrow{MN}\right)+3\overrightarrow{M\Delta}=6\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

21. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις διαμέσους του $A\Delta$, $BE$ και $\Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\overrightarrow{0}$
   (β′) Το σημείο $G$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει:
   $$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\overrightarrow{0}$$
   (γ′) Το σημείο $G$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει:
   $$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$$
   για οποιοδήποτε σημείο $O$.

22. (α′) Θεωρούμε τα τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_2B_2\Gamma_2$ και έστω $G_1, G_2$ τα βαρύκεντρά τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$3\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}$$

(β′) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα $K, \Lambda, M$ των πλευρών του $AB$, $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

23. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να προσδιορίσετε σημείο $M$ για το οποίο να ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{0}$$

24. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να προσδιορίσετε σημείο $M$ για το οποίο να ισχύει:

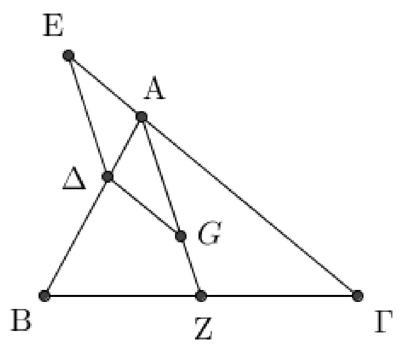
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta}$$

25. Στο επίπεδο δίνονται τέσσερα διακεκριμένα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta$. Θεωρούμε τα μέσα $I, Z$ των $AB$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα καθώς και σημείο $E$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{IZ}$. Να αποδείξετε ότι:

(α′) $2\overrightarrow{IZ} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

(β′) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

26. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο $G$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και για τα σημεία $\Delta$ και $E$ ισχύουν $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.




Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AG\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

27. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα $M, N$ των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α′) $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(β′) Αν σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

28. Θεωρούμε ένα κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και με τις διαδοχικές πλευρές του $AB$ και $B\Gamma$ κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma E$. Αν $K, \Lambda, M$ είναι τα μέσα των $AB$, $\Gamma\Delta$, $\Delta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

    (α΄) $2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$

    (β΄) Το τετράπλευρο $AK\Lambda M$ είναι παραλληλόγραμμο.

29. Θεωρούμε κύκλο $(O, \rho)$ και δύο κάθετες χορδές του $AB$ και $\Gamma\Delta$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $\Sigma$. Να αποδείξετε ότι:

    (α΄) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{O\Sigma}$

    (β΄) Αν $K, \Lambda$ είναι τα μέσα των χορδών $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, το τετράπλευρο $OK\Sigma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

30. Αν για τρία διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ ισχύει:

$$2\left(\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta}\right) + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} - \left(\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}\right)$$

    να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ είναι παράλληλα.

31. Αν για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta$ ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{A\Gamma} + 6\overrightarrow{\Delta\Gamma} + 6\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{0}$$

    Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι αντίρροπα.

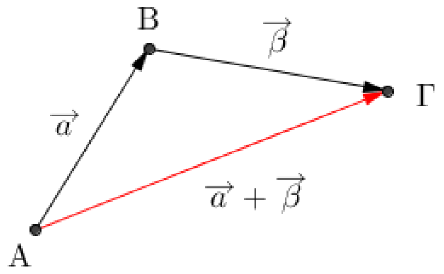
32. Για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta$ ισχύει:

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \kappa\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$$

    όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa + \lambda = 1$.
    Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

## 1.4 Η τριγωνική ανισότητα

Όταν προσθέτουμε δύο διανύσματα έχουμε το παρακάτω σχήμα:




Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

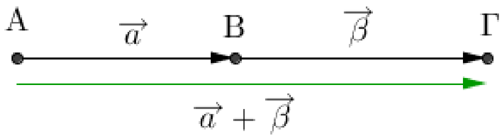
$$|AB - B\Gamma| < A\Gamma < AB + B\Gamma$$

η οποία μεταφράζεται ως εξής:

$$\left||\overrightarrow{a}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| < \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{\beta}\right| < |\overrightarrow{a}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$$

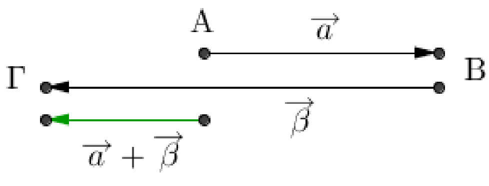
Όταν όμως τα διανύσματα είναι ομόρροπα τότε ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{a}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$$




και όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα ισχύει:

$$\left||\overrightarrow{a}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| = \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{\beta}\right|$$




Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$\left||\overrightarrow{a}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| \le \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{\beta}\right| \le |\overrightarrow{a}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Έστω τρία μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0} \text{ και } \frac{|\overrightarrow{\alpha}|}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{\beta}\right|}{3} = \frac{|\overrightarrow{\gamma}|}{5}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\overrightarrow{\alpha} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\beta}$

(β′) $\overrightarrow{\beta} \nearrow\swarrow \overrightarrow{\gamma}$

34. Έστω τρία μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0} \text{ και } 3\,|\overrightarrow{\alpha}| = 4\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 12\,|\overrightarrow{\gamma}|$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

35. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ ισχύουν:

$$\left|4\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta}\right| \leq 1 \text{ και } \left|-3\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}\right| \leq 2$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| \leq 3$$

36. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ ισχύουν:

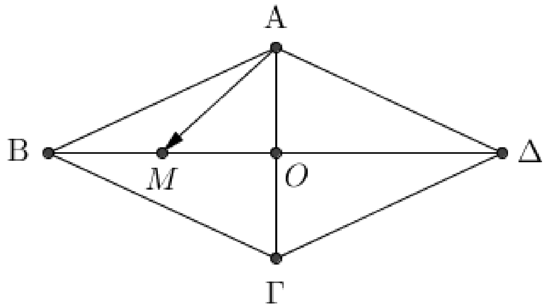
$$|\overrightarrow{\alpha}| = 1\ ,\ \left|\overrightarrow{\beta}\right| = 2 \text{ και } \left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = 3$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $-\overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα.

37. Αν $G$ είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύει $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right| = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\overrightarrow{GB}\right| + \left|\overrightarrow{G\Gamma}\right| > 1$$

38. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και $M$ είναι το μέσον του $OB$.



(α′) Ποιά από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

$i)\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Delta}\quad ii)\ \overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}\quad iii)\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AO}\right|\quad iv)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Delta}$

$v)\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(β′) Ποιό από τα παρακάτω διανύσματα δεν είναι ίσο με $\overrightarrow{0}$;

$i)\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}\quad ii)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}\quad iii)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma A}\quad iv)\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

$v)\ \overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\Gamma A}$

(γ′) Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{AO}\right)$$

(δ′) Ένας μαθητής με αφορμή το παραπάνω σχήμα έκανε τους ακόλουθους συλλογισμούς:

- $O$ μέσον $B\Delta$ άρα: $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$.
- Επομένως ισχύει: $2\left|\overrightarrow{AO}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|$.
- Επειδή το τετράπλευρο είναι ρόμβος ισχύει: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|$.
- Από τα παραπάνω προκύπτει: $2\left|\overrightarrow{AO}\right|=2\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AO}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $OAB$ η υποτείνουσα $AB$ έχει το ίδιο μήκος με την κάθετη πλευρά $AO$!!!!!

Ποιός συλλογισμός ήταν λανθασμένος και οδήγησε τον μαθητή σε αυτό το αποτέλεσμα;

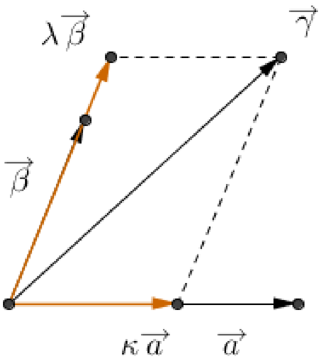
## 1.5 Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

**Ορισμός:** Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma}$ λέμε ότι είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\kappa$ και $\lambda$ ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{\gamma} = \kappa\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{\beta}$$

**Θεώρημα:** Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma}$ του επιπέδου γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ με μοναδικό τρόπο, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $\kappa$ και $\lambda$ τέτοιοι ώστε:

$$\overrightarrow{\gamma} = \kappa\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{\beta}$$

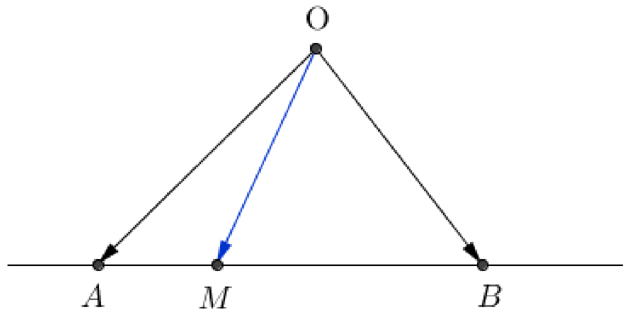



**Πρόταση:** Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\kappa\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 0$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39. Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία $A$ και $B$ είναι σταθερά και το σημείο $M$ είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$.




(α′) Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να είναι $\lambda = -1$.

(β′) Ποιά είναι η θέση του σημείου $M$ όταν $\lambda = 0$;

(γ′) Για ποιές τιμές του $\lambda$ το σημείο $M$ βρίσκεται:

$i)$ αριστερότερα του σημείου $A$ $ii)$ ανάμεσα στα σημεία $A$ και $B$ $iii)$ δεξιότερα του σημείου $B$

(δ′) Να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda+1}\left(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}\right)$$

40. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο $\Delta$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{B\Delta} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

41. Στην πλευρά $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε σημείο $\Delta$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Αν είναι $M$ το μέσον του $B\Delta$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma M}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

42. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $E$ το μέσον της πλευράς του $B\Gamma$. Να προσδιορίσετε σημείο $P$ για το οποίο να ισχύει:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{A\Delta}$$

Στην συνέχεια να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{\Delta P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$$

43. Στις πλευρές $B\Gamma$, $AB$, $A\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία $\Delta, E, Z$ αντίστοιχα ώστε να ισχύουν: $\overrightarrow{B\Delta} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma A}$. Να αποδείξετε ότι:

$$4\overrightarrow{A\Delta} + 9\overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{0}$$

44. Δίνονται τα σημεία $O, A, B, \Gamma$ του επιπέδου τέτοια ώστε τα σημεία $O, A, B$ να μην είναι συνευθειακά και να ισχύει:
$$\overrightarrow{O\Gamma} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}^*$$
Να δείξετε ότι τα σημεία $A, B, \Gamma$ είναι συνευθειακά.

45. Αν για τα σημεία $A, B, K, \Lambda, M$ ισχύει η σχέση:
$$\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Lambda M} - 4\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{A\Lambda} - \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{K\Lambda}$$
να αποδείξετε ότι τα σημεία $K, \Lambda, M$ είναι συνευθειακά.

46. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ και τα σημεία $O, A, B, \Gamma$ για τα οποία ισχύει:
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}$$
$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta} + 3\overrightarrow{\gamma}$$
$$\overrightarrow{O\Gamma} = 3\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}$$
Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A, B, \Gamma$ είναι συνευθειακά.

47. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσός του $AM$, το μέσον $\Delta$ της διαμέσου $AM$ και σημείο $E$ της $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $B, \Delta, E$ είναι συνευθειακά.

48. Έστω σημείο $E$ της διαμέσου $AM$ τριγώνου $AB\Gamma$ με $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AM}$. Αν $Z$ είναι σημείο της $A\Gamma$ ώστε $\overrightarrow{AZ} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $B, Z, E$ είναι συνευθειακά.

49. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε το μέσον $E$ της πλευράς του $A\Delta$ και σημείο $Z$ της διαγωνίου του $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι:
$$\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ZB}$$

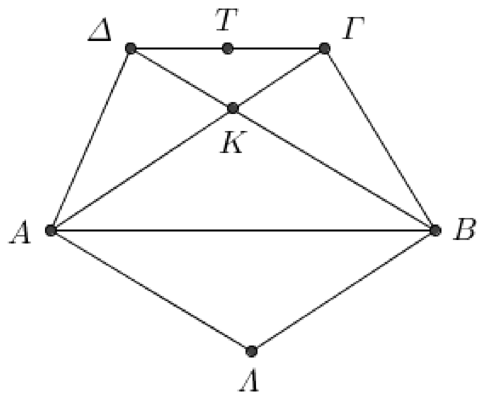
50. Στις πλευρές $AB$, $\Gamma\Delta$ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα σημεία $E, Z$ αντίστοιχα ώστε $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Αν είναι $M, N, P$ τα μέσα των τμημάτων $A\Gamma$, $B\Delta$, $EZ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M, N, P$ είναι συνευθειακά.

51. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία $\Delta, E, Z$ ώστε:
$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}\ ,\ \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$$

(α′) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AZ}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(β′) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\varDelta, E, Z$ είναι συνευθειακά.

52. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\varGamma\varDelta$ είναι τραπέζιο με $AB = 2\varGamma\varDelta$, το $T$ είναι το μέσον του $\varGamma\varDelta$ και το τετράπλευρο $A\varLambda BK$ είναι παραλληλόγραμμο.

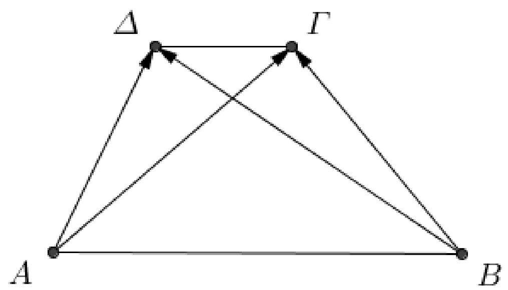



Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\overrightarrow{K\varGamma} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ και $\overrightarrow{K\varDelta} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KB}$.

(β′) Τα σημεία $T, K, \varLambda$ είναι συνευθειακά.

53. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\varGamma\varDelta$ είναι τραπέζιο στο οποίο ισχύει $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{\varGamma\varDelta}$.




Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς $x, y$ για τους οποίους ισχύει:

$$2\overrightarrow{A\varDelta} + 3\overrightarrow{B\varGamma} = x\overrightarrow{A\varGamma} + y\overrightarrow{B\varDelta}$$

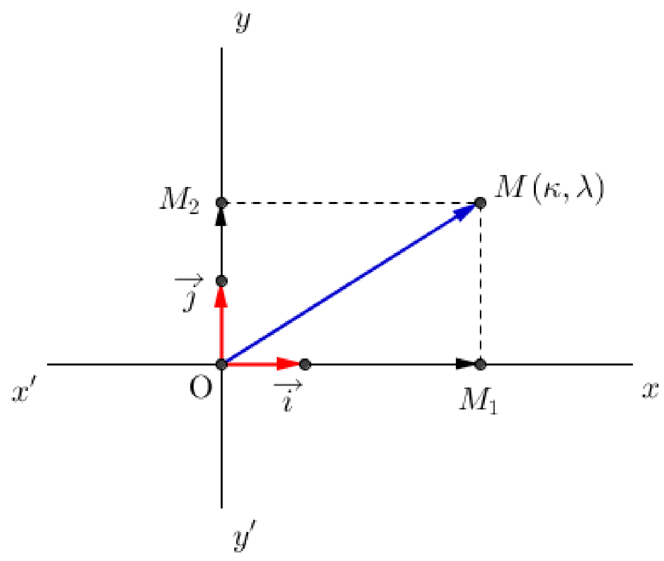
54. Στο επίπεδο δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία $O, A, B$. Θεωρούμε το μέσον $K$ του $AB$ και το σημείο $\varSigma$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{O\varSigma} = -4\overrightarrow{OK}$. Για κάποιο σημείο $M$ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{BM} = (1-\mu)\,\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{OA} + 2\mu\overrightarrow{OB}$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο $M$ ταυτίζεται με το σημείο $\varSigma$.

## 1.6 Συντεταγμένες




Στο επίπεδο θεωρούμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ που η αρχή τους είναι το σημείο τομής τους $O$ και οι οποίοι είναι εφοδιασμένοι με μοναδιαία διανύσματα (δηλαδή διανύσματα που έχουν μέτρο 1 και θετική φορά διαγραφής) $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα. Τότε λέμε ότι έχουμε δημιουργήσει ένα **ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς** ή ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και συμβολίζουμε $Oxy$.
Αν δοθεί ένα σημείο $M$ στο παραπάνω επίπεδο και το προβάλουμε πάνω στους δύο άξονες, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\kappa$ και $\lambda$ ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \kappa\,\vec{i} + \lambda\,\vec{j}$$

Στο διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ και στο σημείο $M$ αντιστοιχίζουμε το ζευγάρι $\kappa, \lambda$ αυτών των πραγματικών αριθμών τους οποίους ονομάζουμε **συντεταγμένες** του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ και του σημείου $M$ και συμβολίζουμε:

$$\overrightarrow{OM} = (\kappa, \lambda)$$

$$M(\kappa, \lambda)$$

Ειδικότερα ο αριθμός $\kappa$ λέγεται **τετμημένη** ενώ ο αριθμός $\lambda$ λέγεται **τεταγμένη**.

### 1.6.1 Πράξεις και ισότητα διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα. Τότε ισχύουν:

$$i)\quad \vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2$$

$$ii)\quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

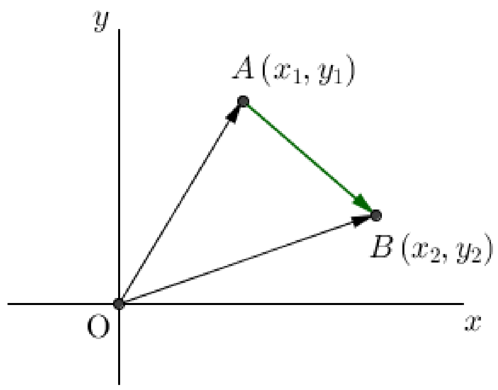
$$iii)\quad \lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda x_2) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

### 1.6.2 Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Τότε:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

*Απόδειξη:*




Επειδή ισχύει $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ έχουμε:

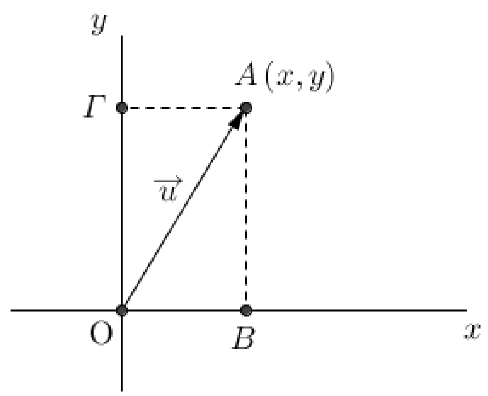
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \end{aligned}$$

### 1.6.3 Μέτρο διανύσματος και απόσταση σημείων

Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (x, y)$. Τότε:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

*Απόδειξη:*




Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $OAB$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{u}|^2 &= OA^2 \\ &= OB^2 + AB^2 \\ &= OB^2 + O\Gamma^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας βρίσκουμε ότι η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

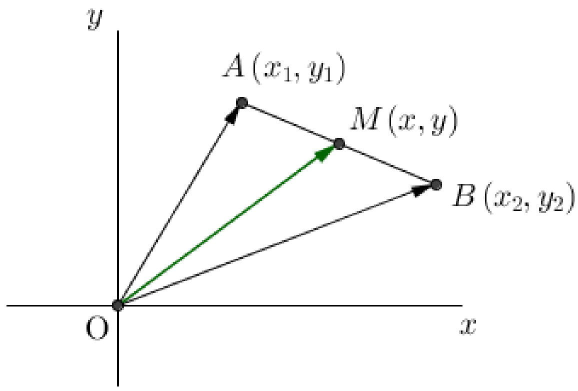
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### 1.6.4 Συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Αν $M$ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $AB$ τότε ισχύει:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

*Απόδειξη:*




Αν είναι $M(x, y)$ το μέσον του $AB$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) \\
&= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει:

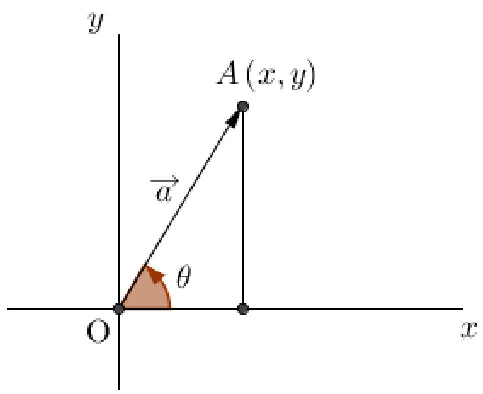
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

### 1.6.5 Συντεταγμένες βαρύκεντρου τριγώνου

Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$. Τότε για το βαρύκεντρο $G$ του τριγώνου ισχύει:

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

### 1.6.6 Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος και συνθήκες παραλληλίας




Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{a} = (x, y)$ και το σημείο $A(x, y)$ ώστε $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$. Θα ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ με τον άξονα $x'x$, την γωνία που πρέπει να στρέψουμε τον θετικό ημιάξονα $Ox$ κατά την θετική φορά διαγραφής (αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία $OA$.
Για την γωνία $\theta$ ισχύει: $0 \leq \theta < 2\pi$

Θα ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του διανύσματος $\overrightarrow{a}$ και θα συμβολίζουμε $\lambda_{\overrightarrow{a}}$ το πηλίκο $\dfrac{y}{x}$ υπό την προϋπόθεση ότι $x \neq 0$, δηλαδή ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ δεν είναι κάθετο στον άξονα $x'x$. Δηλαδή:

$$\lambda_{\overrightarrow{a}} = \frac{y}{x}$$

Προσοχη: Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για διανύσματα που είναι κάθετα στον άξονα $x'x$.

Έστω δύο διανύσματα $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}\right) = 0$$

όπου $det\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ δεν είναι κάθετα στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε την παρακάτω ισοδυναμία:

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{a}} = \lambda_{\overrightarrow{\beta}}$$

*Απόδειξη:* Αφού τα διανύσματα δεν είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ έχουμε $x_1 \neq 0$ και $x_2 \neq 0$, οπότε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{\beta} &\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\beta}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{a}} = \lambda_{\overrightarrow{\beta}} \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55. Δίνονται τα διανύσματα:
$$\overrightarrow{\alpha} = \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2, 2\lambda^2 - 3\lambda - 2\right)$$
$$\overrightarrow{\beta} = \left(\lambda^2 - 5\lambda + 6, -3\lambda^2 + 7\lambda - 2\right)$$
Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό $\lambda$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$.

56. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό $x$ ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (x, 1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (4, x)$ να είναι ομόρροπα.

57. Να βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (3, 4)$ και να έχει διπλάσιο μέτρο από αυτό.

58. Αφού προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A\,(1, 1)$, $B\,(1, 5)$ και $\Gamma\,(2, 1)$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

59. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου $A\,(-1, 4)$ και το μέσον της πλευράς $AB$ είναι το σημείο $\Delta\,(2, 3)$.
    (α′) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής $B$.
    (β′) Αν το βαρύκεντρο του τριγώνου είναι το σημείο $G\,(0, -3)$, να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής $\Gamma$.

60. Δίνονται τα σημεία $A\,(-1, 6)$ και $B\,(-9, -2)$. Να βρείτε σημείο του άξονα $x'x$ το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία $A$ και $B$.

61. Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (17, -6)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{u_1} = (1, 2)$ και $\overrightarrow{u_2} = (-3, 4)$.

62. Δίνονται τα σημεία $A\,(\lambda, 1)$, $B\,(2, 0)$ και $\Gamma\,(\lambda - 7, \lambda)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$.

63. Δίνονται τα σημεία $A\,(-2, 2)$, $B\left(\lambda^2, 5\right)$ και $\Gamma\,(\lambda - 2, 3)$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$ ώστε τα παραπάνω σημεία να βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

64. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\,(1, 2)$, $\Gamma\,(3, 5)$ και έστω $M\,(4, 2)$ το μέσον του $B\Gamma$. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

65. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες ενός σημείου $M$ της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A\,(2,1)$ και $B\,(3,2)$ ώστε το τρίγωνο $MAB$ να είναι ισοσκελές με μήκος ίσων πλευρών 2.

66. Έστω $A\,(0,7)$, $B\,(2,1)$ και $\Gamma\,(8,0)$ οι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$. Αν $E, Z$ είναι τα μέσα των πλευρών του $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε με την βοήθεια των συντεταγμένων ότι $\overrightarrow{EZ}//\overrightarrow{B\Gamma}$.

67. Έστω $A\,(1,1)$, $B\,(6,1)$, $\Gamma\,(6,6)$ και $\Delta\,(1,6)$ οι κορυφές ενός ορθογωνίου. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

68. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{\alpha} = (3\kappa, 3)$$
$$\overrightarrow{\beta} = (-5, \lambda)$$

(α′) Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\kappa$ και $\lambda$ ώστε $\overrightarrow{\alpha}//y'y$ και $\overrightarrow{\beta}//x'x$.

(β′) Να βρείτε την σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί $\kappa$ και $\lambda$ ώστε $\overrightarrow{\alpha}//\overrightarrow{\beta}$.

(γ′) Για ποιά τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\dfrac{3\pi}{4}$;

(δ′) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$;

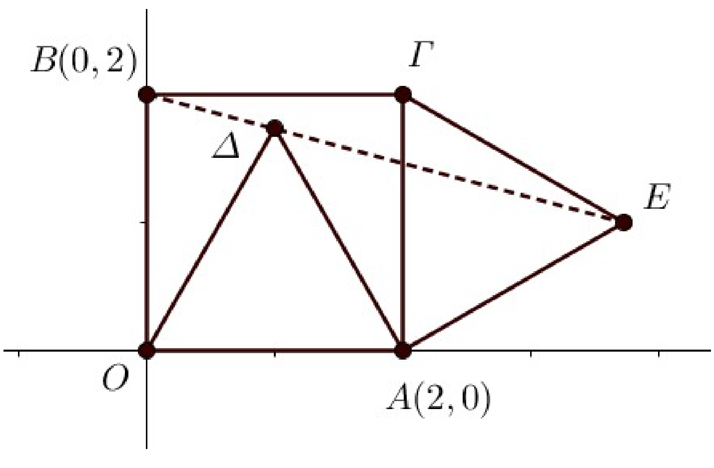
69. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta} = (4, -2)$$
$$\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta} = (-7, 8)$$

(α′) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\alpha} = (-1, 2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (2, -2)$.

(β′) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\kappa$ για τον οποίον τα διανύσματα $\kappa\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ και $2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta}$ είναι παράλληλα.

70. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $OA\Gamma B$ είναι τετράγωνο πλευράς 2 και τα τρίγωνα $OA\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρα.



(α′) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\mathit{\Delta}$ και $E$.

(β′) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $B\mathit{\Delta}E$ είναι συνευθειακά.

71. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O$ θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{OA} = (-1,2)\ ,\ \overrightarrow{OB} = (-3,1) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\mathit{\Gamma}} = (-2,-1)$$

Να βρείτε σημείο $M$ του άξονα $x'x$ ώστε η παράσταση:

$$d = \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{M\mathit{\Gamma}}\right|^2$$

να παίρνει ελάχιστη τιμή.

72. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $OB\mathit{\Gamma}$ με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $B(\beta,0)$ και $\mathit{\Gamma}(0,\gamma)$, όπου $\beta > 0$ και $\gamma > 0$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $OB\mathit{\Delta}E$ και $O\mathit{\Gamma}ZH$.

(α′) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\mathit{\Delta}, E, Z, H$.

(β′) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Z, O, \mathit{\Delta}$ είναι συνευθειακά.

(γ′) Αν $M$ είναι το μέσον του $Z\mathit{\Delta}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MB\mathit{\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

73. Ένας κύκλος με κέντρο το σημείο $K(3,5)$ διέρχεται από το σημείο $A(0,4)$.

(α′) Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

(β′) Αν το σημείο $B(2,\kappa)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\kappa$.

(γ′) Αφού αποδείξετε ότι το σημείο $\mathit{\Gamma}(6,6)$ είναι και αυτό σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι η $A\mathit{\Gamma}$ είναι μία διάμετρός του.

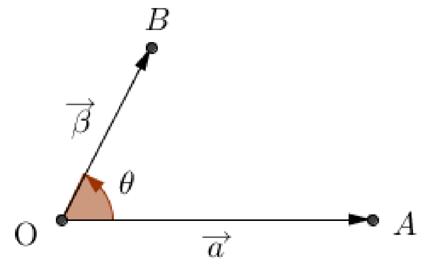
74. Θεωρούμε τα σημεία $A(2,-2)$, $B(4,6)$ και $\mathit{\Gamma}(10,13)$. Έστω ακόμη τυχαίο σημείο $\mathit{\Delta}(\kappa,\lambda)$.

(α′) Να βρείτε το σημείο $\mathit{\Delta}$ αν γνωρίζετε ότι το τετράπλευρο $AB\mathit{\Gamma}\mathit{\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμο.

(β′) Ποιές σχέσεις πρέπει να ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί $\kappa$ και $\lambda$ ώστε το τετράπλευρο $AB\mathit{\Gamma}\mathit{\Delta}$ να είναι τραπέζιο;

(γ′) Να βρείτε το σημείο $\mathit{\Delta}$ αν γνωρίζετε ότι το τετράπλευρο $AB\mathit{\Gamma}\mathit{\Delta}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 1.7 Εσωτερικό γινόμενο




Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο αναφοράς $O$ θεωρούμε τα σημεία $A$ και $B$ ώστε $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{\beta}$. Ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ και συμβολίζουμε $\left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{\beta}}\right)$ την κυρτή γωνία των ημιευθειών $OA$ και $OB$.

Για την γωνία δύο διανυσμάτων ισχύει: $0 \leq \left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{\beta}}\right) \leq \pi$

Ειδικότερα: αν $\overrightarrow{a} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\beta}$, τότε $\left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{\beta}}\right)=0$ και αν $\overrightarrow{a} \nearrow\swarrow \overrightarrow{\beta}$, τότε $\left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{\beta}}\right)=\pi$

**Ορισμός:** Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ με $\left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{\beta}}\right)=\theta$. Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{\beta}$ και συμβολίζουμε $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό:

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}=|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Επίσης ορίζουμε: $\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{a}=0$

**Πρόταση 1:** Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{\beta}=(x_2,y_2)$. Τότε ισχύει:

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$$

**Ιδιότητες:** Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&i) && \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{a}\\
&ii) && \overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{\gamma}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\gamma}\\
&iii) && \lambda\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}\right)=(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{a}\cdot\left(\lambda\overrightarrow{\beta}\right)\quad,\quad \lambda\in\mathbb{R}\\
&iv) && \overrightarrow{a}^2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2\\
&v) && \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{\beta}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}=0
\end{aligned}$$

*Παρατηρήσεις:*

1) Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή:

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}\right)\overrightarrow{\gamma}\neq(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\gamma})\overrightarrow{\beta}$$

2) Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής, δηλαδή:

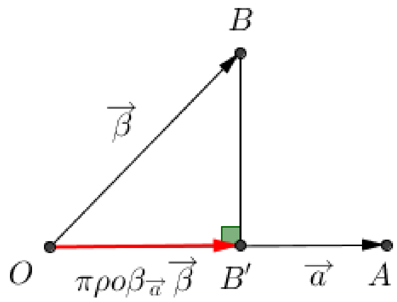
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\gamma}\nRightarrow\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\gamma}$$

**Πρόταση 2:** Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ που δεν είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lambda_{\overrightarrow{\alpha}}\lambda_{\overrightarrow{\beta}} = -1$$

*Απόδειξη:* Αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε επειδή τα διανύσματα δεν είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ θα είναι $x_1 \neq 0$ και $x_2 \neq 0$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 = -y_1y_2 \\
&\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1 \\
&\Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{\alpha}}\lambda_{\overrightarrow{\beta}} = -1
\end{aligned}$$




Θεωρούμε δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ καθώς και τα σημεία $O, A, B$ ώστε $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\beta}$. Από το σημείο $B$ φέρνουμε κάθετη $BB'$ στην ημιευθεία $OA$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OB'}$ ονομάζεται προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ και συμβολίζεται $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\beta}}\overrightarrow{\alpha}$.

**Πρόταση 3:** Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύει:

$$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\beta}}\overrightarrow{\alpha}$$

*Απόδειξη:* Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{BB'}$ είναι κάθετα ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B'B} = 0$. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\
&= \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B'B} \\
&= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} \\
&= \overrightarrow{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\beta}}\overrightarrow{\alpha}
\end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75. Θεωρούμε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $\alpha$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του $\alpha$ τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα:

    $i)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}\quad ii)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}\quad iii)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}\quad iv)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\quad v)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Delta}$

76. Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα:

    $i)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\quad ii)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}\quad iii)\ \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}\quad iv)\ \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}\quad v)\ \overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{A\Delta}\quad vi)\ \overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

77. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν: $|\overrightarrow{\alpha}|=2$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right|=3$ και $\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

    $i)\quad \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}$

    $ii)\quad \left(2\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\alpha}-2\overrightarrow{\beta}\right)$

78. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν: $|\overrightarrow{\alpha}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right|=4$ και $\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

    $i)\quad \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}$

    $ii)\quad 2\overrightarrow{\alpha}\cdot\left(3\overrightarrow{\alpha}+2\overrightarrow{\beta}\right)$

    $iii)\quad \left(\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right)^2$

79. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ με:

    $$|\overrightarrow{\alpha}|=\sqrt{2}\ \ ,\ \ \left|\overrightarrow{\beta}\right|=2\sqrt{2}\ \ \text{και}\ \ \left(\widehat{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

    Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

    $i)\ \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}\qquad ii)\ \overrightarrow{\alpha}^2+\overrightarrow{\beta}^2\qquad iii)\ \left(\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right)^2$

    $iv)\ \left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right|\quad v)\ \left(\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right)\quad vi)\ \left(\overrightarrow{\alpha}-2\overrightarrow{\beta}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{\alpha}+3\overrightarrow{\beta}\right)$

80. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν:

    $$|\overrightarrow{\alpha}|=\sqrt{2}\ \ ,\ \ \left|\overrightarrow{\beta}\right|=2\ \ \text{και}\ \ \left(\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\alpha}+2\overrightarrow{\beta}\right)=-4$$

    Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

81. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν:

    $$|\overrightarrow{\alpha}|=2\ \ ,\ \ \left|\overrightarrow{\beta}\right|=3\ \ \text{και}\ \ \left(\widehat{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό $\kappa$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

82. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν ίσα μέτρα. Αν τα διανύσματα $\vec{x} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{y} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να υπολογίσετε την γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$.

83. Αν $\vec{\alpha} = (-1, 1)$, $\vec{\beta} = (1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, 2)$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$i)$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ $\quad ii)$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ $\quad iii)$ $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\gamma}$ $\quad iv)$ $\left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right) \cdot \vec{\alpha}$ $\quad v)$ $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$

84. Αν $\vec{\alpha} = (2, -1)$, $\vec{\beta} = (-1, -2)$ και $\vec{\gamma} = (3, 4)$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$i)$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ $\quad ii)$ $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ $\quad iii)$ $(2\vec{\alpha}) \cdot (3\vec{\gamma})$ $\quad iv)$ $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$ $\quad v)$ $\left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right)^2$

85. Δίνονται τα σημεία $A(1, x)$, $B(x - 2, 3)$ και $\varGamma(2, -1)$, όπου $x \neq 3$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $x$ για τον οποίο ισχύει $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\varGamma}$.

86. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2, 3)$ και $\vec{\beta} = (7, 4\lambda)$. Να βρείτε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$ τα διανύσματα είναι:

$i)$ παράλληλα.
$ii)$ κάθετα.

87. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda + 2)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ και $\vec{\gamma} = (0, 7)$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\lambda$ για την οποία είναι:

$i)$ $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

$ii)$ $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$

$iii)$ $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

88. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = -\frac{|\vec{\alpha}|}{\left|\vec{\beta}\right|}$$

89. Να αποδείξετε ότι για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2$$

90. Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και το διάνυσμα:

$$\vec{v} = \left(\vec{\beta}^2\right)\vec{a} - \left(\vec{a}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\beta}$$

Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

91. (α΄) Να αποδείξετε ότι για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι ανισότητες:

i. $\left|\vec{a}\cdot\vec{\beta}\right| \leq |\vec{a}|\left|\vec{\beta}\right|$

ii. $\left(\vec{a}\cdot\vec{\beta}\right)^2 \leq \vec{a}^2\vec{\beta}^2$

Πότε οι παραπάνω ισχύουν ως ισότητες;

(β΄) Να αποδείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, y_1, y_2$ ισχύει:

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$

Πότε η παραπάνω ισχύει ως ισότητα;

(γ΄) Να αποδείξετε ότι για τέσσερις πραγματικούς αριθμούς $a, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει:

$$(a + \beta + \gamma + \delta)^2 \leq \left[(a+\beta)^2 + 1\right]\left[(\gamma+\delta)^2 + 1\right]$$

92. Έστω $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , $\vartheta \neq \frac{\pi}{4}$. Θεωρούμε τα σημεία:

$$A\left(\eta\mu\vartheta, \sigma\upsilon\nu\vartheta\right) \ , \ B\left(-\eta\mu\vartheta, -\sigma\upsilon\nu\vartheta\right) \quad \text{και} \quad \Gamma\left(\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta\right)$$

(α΄) Να δείξετε ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $AB$ είναι σταθερό.

(β΄) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο $\Gamma$.

(γ΄) Να βρείτε τις τιμές του $\vartheta$ για τις οποίες το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

93. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-4, 3)$ και $\vec{v} = (5, 12)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο να ισχύει $|\vec{a}| = \sqrt{37}$ και $\vec{a} \perp (2\vec{u} + 3\vec{v})$.

94. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 4)$ και $\vec{\beta} = (-3, 1)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ για το οποίο να ισχύει $\vec{a}\cdot\vec{\gamma} = 18$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 8$.

95. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με:

$$|\vec{a}| = 5 \ , \ \left|\vec{\beta}\right| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Αν $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 5\vec{\beta}$, τότε:

(α΄) Να υπολογίσετε το $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$

(β΄) Να υπολογίσετε το $|\vec{\gamma}|$

(γ΄) Να υπολογίσετε το $\vec{a}\cdot\vec{\gamma}$ και το $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

(δ′) Να υπολογίσετε τις γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$ και $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)$

96. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \;\;,\;\; \left|\vec{\beta}\right| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

(α′) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

(β′) Να υπολογίσετε το $|\vec{u}|$ και το $|\vec{v}|$

(γ′) Να υπολογίσετε το $\vec{u}\cdot\vec{v}$

(δ′) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

97. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \;\;,\;\; \left|\vec{\beta}\right| = 1 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

98. Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\beta}$ ώστε $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ισχύει $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{6}$, να υπολογίσετε το $\left|\vec{\beta}\right|$.

99. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\,(2,1)$, $B\,(-1,0)$ και $\Gamma\,(4,5)$. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$.

100. Αν $\vec{\alpha} = \left(\sqrt{3}\,(x-1)\,,2x\right)$ και $\vec{\beta} = \left(-\sqrt{3},1\right)$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό $x$ ώστε να ισχύει $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

101. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \;\;,\;\; \left|\vec{\beta}\right| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \;\; \text{και} \;\; \vec{y} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

Αν $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = \frac{1}{7}$, τότε:

(α′) Να υπολογίσετε την γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$

(β′) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\lambda$ ώστε τα διανύσματα:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} - (\lambda+1)\,\vec{\beta} \;\; \text{και} \;\; \vec{\delta} = 13\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

να είναι κάθετα.

(γ′) Για την τιμή του $\lambda$ που βρήκατε, να υπολογίσετε το $|\vec{\gamma}|$.

102. Αν για τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ ισχύουν $|\overrightarrow{u}| = 2$, $|\overrightarrow{v}| = 5$ και $|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}| = 3$, να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$.

103. Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \left(\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}\right) \perp \left(\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta}\right) \quad \text{και} \quad \left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = 6$$

Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

104. Αν $|\overrightarrow{\alpha}| = \left|\overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{\gamma}| = 1$ και $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$, να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

105. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ με $|\overrightarrow{\alpha}| = 1$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 2$ και $|\overrightarrow{\gamma}| = 3$. Αν για τα διανύσματα αυτά ισχύει $\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma} - 3\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{\alpha}$$

106. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ με:

$$|\overrightarrow{\alpha}| = 2 \ , \ \left|\overrightarrow{\beta}\right| = 1 \ , \ |\overrightarrow{\gamma}| = 2 \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma} = 4$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

107. Έστω $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\alpha}}\overrightarrow{\beta} = \left(\frac{\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}}{\overrightarrow{\alpha}^2}\right)\overrightarrow{\alpha}$$

108. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, 3)$ και $\overrightarrow{\beta} = (8, 4)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$.

109. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (14, -5)$ και $\overrightarrow{\beta} = (1, -4)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$.

110. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4 \quad , \quad \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = 6 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Αν $M$ είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, τότε:

(α′) Να υπολογίσετε το $\left|\overrightarrow{AM}\right|$

(β′) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\dfrac{14}{19}\overrightarrow{AM}$.

111. Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\beta}}\overrightarrow{\alpha} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\beta} \quad \text{και} \quad \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\alpha}}\overrightarrow{\beta} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\alpha}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{|\overrightarrow{\alpha}|}{\left|\overrightarrow{\beta}\right|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(β′) Να βρείτε την γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right)$

112. Έστω $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν ισχύει:

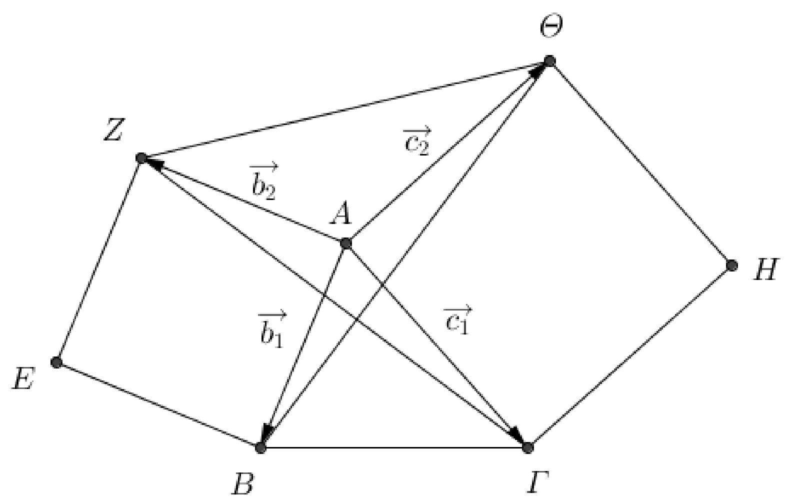
$$\left(\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} - |\overrightarrow{\alpha}|\right)\overrightarrow{\alpha} = \left(2 - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right)\overrightarrow{\beta}$$

τότε:

(α′) Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

(β′) Να δείξετε ότι η $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\alpha}}\overrightarrow{\beta}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο του $\overrightarrow{\alpha}$.

113. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABEZ$ και $A\Gamma H\Theta$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.




(α′) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{c_1} = -\overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{c_2}$

(β′) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Theta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Theta} \cdot \overrightarrow{Z\Gamma}$. Τι συμπεραίνετε για τις ευθείες $B\Theta$ και $\Gamma Z$;

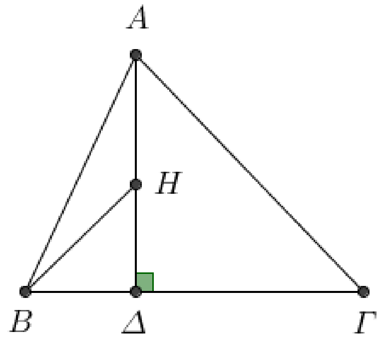
114. Σε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα σημεία $E, Z$ των πλευρών του $B\Gamma$ και $AB$ αντίστοιχα ώστε $AZ = BE$. Να αποδείξετε ότι $AE \perp \Delta Z$.

115. Σε ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90°$. Αν $M$ και $N$ είναι τα μέσα των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

(α′) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(β′) $MN \perp B\Delta$

116. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$, το ύψος του $ΑΔ$ και το ορθόκεντρό του $H$.



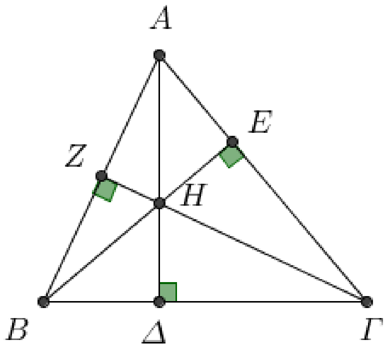

Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

(β′) $\overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{\Delta B} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

(γ′) $\overrightarrow{\Delta A} \cdot \overrightarrow{\Delta H} = \overrightarrow{\Delta B} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

117. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ορθόκεντρό του $H$.

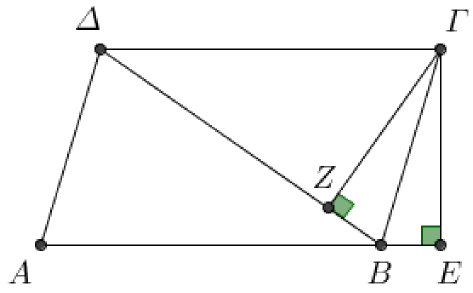



Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{H\Gamma} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{H\Gamma}$

(β′) $\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{\Gamma H} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

118. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ φέρνουμε $ΓΕ \perp ΑΒ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$.

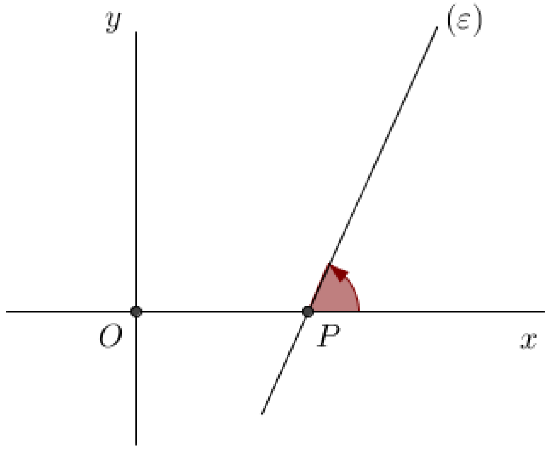



Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{B\Gamma}^2 = \overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{BZ}$$

# 2 Η ΕΥΘΕΙΑ

## 2.1 Βασική θεωρία και υπολογισμοί




Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε μια ευθεία $(\varepsilon)$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P$. Ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει η ευθεία $(\varepsilon)$ με τον άξονα $x'x$ την γωνία που πρέπει να στρέψουμε τον άξονα $x'x$ γύρω από το $P$ κατά την θετική φορά διαγραφής μέχρι να συμπέσει με την ευθεία $(\varepsilon)$ .
Στην περίπτωση που η ευθεία $(\varepsilon)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ θεωρούμε ότι είναι ίση με 0.
Επομένως για την γωνία $\vartheta$ που σχηματίζει μια ευθεία $(\varepsilon)$ με τον άξονα $x'x$ ισχύει:

$$0 \leq \vartheta < \pi$$

Στην περίπτωση που η ευθεία $(\varepsilon)$ δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δηλαδή όταν $\vartheta \neq \dfrac{\pi}{2}$, τότε ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $(\varepsilon)$ τον αριθμό $\varepsilon\varphi\vartheta$ και συμβολίζουμε $\lambda_\varepsilon$. Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα $x'x$

**Πρόταση:** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης οποιουδήποτε μη μηδενικού διανύσματος που είναι παράλληλο στην ευθεία.

Συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$$

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$$

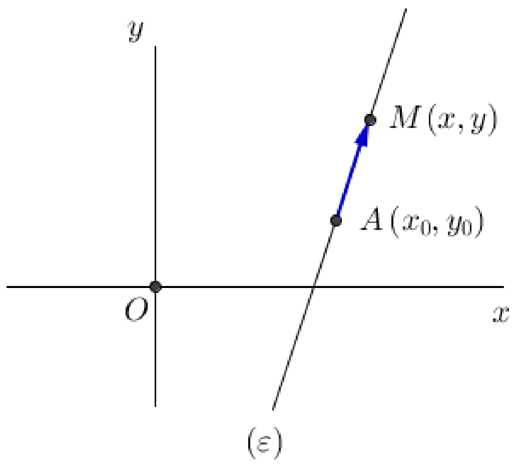
## 2.2 Εξίσωση ευθείας

### 2.2.1 Ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων έχουμε μια ευθεία $(\varepsilon)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(x_0, y_0\right)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$. Τότε η εξίσωσή της είναι:

$$(\varepsilon) : y - y_0 = \lambda\left(x - x_0\right)$$

*Απόδειξη:*

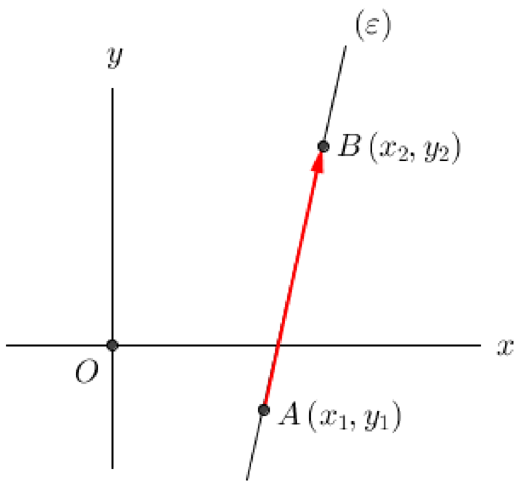



Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M(x,y)$ της ευθείας $(\varepsilon)$ διαφορετικό από το σημείο $A$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ευθεία $(\varepsilon)$ επομένως έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_{\overrightarrow{AM}} &= \lambda \\ \Leftrightarrow \frac{y-y_0}{x-x_0} &= \lambda \\ \Leftrightarrow y-y_0 &= \lambda(x-x_0) \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα επαληθεύεται και από τις συντεταγμένες του σημείου $A$ επομένως επαληθεύεται από τις συντεταγμένες όλων των σημείων της ευθείας.

### 2.2.2 Ευθεία που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία



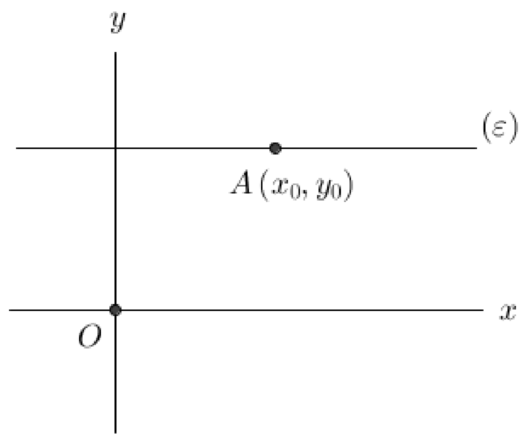

Έστω μια ευθεία $(\varepsilon)$ που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο στην ευθεία και έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με αυτή. Επομένως η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

άρα η εξίσωσή της θα είναι:

$$(\varepsilon): y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

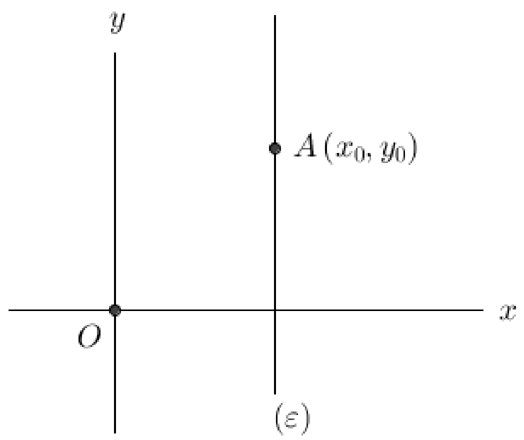
### 2.2.3 Ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$




Αν μία ευθεία $(\varepsilon)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(x_0, y_0\right)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y = y_0$$

### 2.2.4 Ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$




Αν μία ευθεία $(\varepsilon)$ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(x_0, y_0\right)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): x = x_0$$

Για τις ευθείες αυτές δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

### 2.2.5 Οι μορφές της εξίσωσης μιας ευθείας

*Ανηγμένη μορφή:* Η εξίσωση:

$$y = \lambda x + \kappa \quad , \quad \lambda, \kappa \in \mathbb{R}$$

παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$.

*Γενική ή κανονική μορφή:* Η εξίσωση:

$$ax + \beta y + \gamma = 0 \quad , \quad a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

παριστάνει ευθεία υπό την προϋπόθεση ότι οι αριθμοί $a$ και $\beta$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.
Αν $\beta \neq 0$ η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{a}{\beta}$ και κατά συνέπεια το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1} = (-\beta, a)$ είναι παράλληλο στην ευθεία, ενώ το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_2} = (a, \beta)$ είναι κάθετο στην ευθεία.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

119. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α′) όταν διέρχεται από το σημείο $A\left(1,\sqrt{3}\right)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\dfrac{2\pi}{3}$.

(β′) όταν διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-1,5)$.

(γ′) όταν διέρχεται από τα σημεία $A(2,4)$ και $B(4,4)$.

(δ′) όταν διέρχεται από τα σημεία $A(-3,4)$ και $B(-3,7)$.

120. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α′) όταν διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

(β′) όταν διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(6,8)$.

(γ′) όταν διέρχεται από το σημείο $A(3,-5)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(δ′) όταν διέρχεται από το σημείο $A(-1,7)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

121. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και είναι:

(α′) παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 5$

(β′) κάθετη στην ευθεία $(\delta): -x + 2y + 1 = 0$

122. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2,-3)$ και είναι:

(α′) παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 4x - y + 2 = 0$

(β′) κάθετη στην ευθεία $(\delta): y = -x + 7$

123. Δίνονται τα σημεία $A(14,5)$ και $B(2,-1)$.

(α′) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία είναι $x - 2y - 4 = 0$.

(β′) Να βρείτε τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

124. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(0,12)$ και $B(6,8)$. Να βρείτε:

(α′) τις συντεταγμένες των μέσων $K$ και $\Lambda$ των τμημάτων $OA$ και $AB$ αντίστοιχα.

(β′) το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{K\Lambda}$.

(γ′) την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ που διέρχεται από το σημείο $A$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$.

125. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): y = x + 1$$

$$(\varepsilon_2): y = 2x - 3$$

Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι:

(α′) παράλληλη στην ευθεία $(\eta) : x + 2y + 1 = 0$.

(β′) κάθετη στην ευθεία $(\delta) : -x + 3y - 2 = 0$.

(γ′) κάθετη στον άξονα $x'x$.

(δ′) παράλληλη στον άξονα $x'x$.

126. Δίνονται τα σημεία $A\,(2,5)$ και $B\,(6,-3)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος $AB$.

127. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A\,(0,2)$, $B\,(2,4)$ και $\Gamma\,(-3,3)$. Να βρείτε:

(α′) την εξίσωση της διαμέσου $AM$.

(β′) την εξίσωση του ύψους $BE$.

(γ′) την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς $A\Gamma$.

128. Δίνονται τα σημεία $A\,(1,3)$, $B\,(-1,0)$ και $\Gamma\,(3,-2)$.

(α′) Να δείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

(β′) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $AB$ και $A\Gamma$.

(γ′) Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών $B\Delta$ και $\Gamma E$ του τριγώνου.

(δ′) Να βρείτε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου $H$ του τριγώνου.

129. Δίνονται τα σημεία $A\,(2,7)$ και $B\,(4,9)$.

(α′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ που διέρχεται από τα σημεία $A$ και $B$.

(β′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\delta)$ που διέρχεται από το μέσον $M$ του ευθύγραμμου τμήματος $AB$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

(γ′) Αν $\Gamma, \Delta$ είναι τα σημεία τομής των ευθειών $(\varepsilon)$ και $(\delta)$ με τον άξονα $x'x$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο $M\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

130. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A\,(2,-3)$ και σχηματίζει με τους άξονες συντεταγμένων ισοσκελές τρίγωνο.

131. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A\,(1,2)$ ως προς την ευθεία $(\varepsilon) : x + y = 5$.

132. Δίνεται η ευθεία:

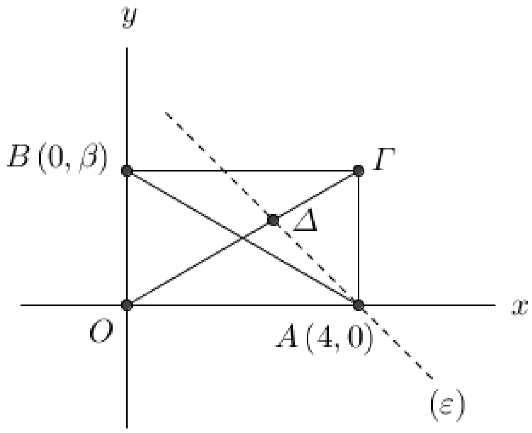
$$(\varepsilon) : y = 5x - 2$$

(α′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon_1)$ που είναι συμμετρική της ευθείας $(\varepsilon)$ ως προς τον άξονα $x'x$.

(β′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon_2)$ που είναι συμμετρική της ευθείας $(\varepsilon)$ ως προς τον άξονα $y'y$.

(γ′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon_3)$ που είναι συμμετρική της ευθείας $(\varepsilon)$ ως προς την αρχή των αξόνων.

133. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $OA\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.




(α′) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του $O\Gamma$ και $AB$.

(β′) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $135°$.

(γ′) Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό $\beta$, αν γνωρίζετε ότι η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει την ευθεία $O\Gamma$ σε σημείο $\Delta$ το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

134. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\,(2,1)$ και ύψη:

$$(\upsilon_\beta) : 3x + y - 11 = 0$$

$$(\upsilon_\gamma) : x - y + 3 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών του $B$ και $\Gamma$.

135. Δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις:

$$x + 2y + 1 = 0$$

$$2x + y + 5 = 0$$

Το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K\,(1,2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών του παραλληλογράμμου και τις συντεταγμένες των κορυφών του.

136. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $B\,(2,-5)$ και:

$$(\upsilon_\alpha) : y = -x + 7$$

$$(\mu_\alpha) : 11x + 3y - 21 = 0$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του τριγώνου και τις εξισώσεις των πλευρών του.

137. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το μέσον της πλευράς $AB$ είναι το σημείο $M\left(0,-1\right)$ και:

$$(\upsilon_\alpha) : x + 3y - 5 = 0$$

$$(\mu_\beta) : x = 1$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου και τις εξισώσεις των πλευρών του.

138. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\left(3,-1\right)$. Το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι το σημείο $H\left(4,-1\right)$. Η ευθεία $(\varepsilon) : x+4y-16 = 0$ είναι η μεσοκάθετος της πλευράς $AB$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του τριγώνου και τις εξισώσεις των πλευρών του.

139. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται η κορυφή του $A\left(4,-1\right)$, το ορθόκεντρό του $H\left(3,2\right)$ και το βαρύκεντρό του $G\left(3,-3\right)$. Αν η ευθεία $A\Gamma$ έχει εξίσωση $x + 2y - 2 = 0$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του $B$ και $\Gamma$.

140. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 - y^2 - x + 5y - 6 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες ευθείες.

141. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 5x + 5y + 4 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.

142. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν ευθεία;

$$(\lambda - 1)\, x - \left(1 - \lambda^2\right) y + \lambda + 2 = 0$$

$$\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) x + \left(\lambda^2 - \lambda - 12\right) y + 1 + \lambda^2 = 0$$

143. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\mu - 1)\, x + \mu y + \mu - 2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. στην συνέχεια να βρείτε τις τιμές του $\mu$ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία είναι:

(α′) παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(β′) παράλληλη στον άξονα $y'y$.

(γ′) κάθετη στην ευθεία $(\zeta) : -x + 2y + 7 = 0$.

(δ′) παράλληλη στην ευθεία $(\delta) : 3x - (\mu + 1)\, y - 8 = 0$.

144. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : (\lambda - 1)\, x + \lambda y + 8 = 0$$

$$(\varepsilon_2) : \lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$ για τις οποίες οι ευθείες είναι κάθετες.

145. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 3x - y - 2 = 0$$

$$(\varepsilon_2): (\lambda + 1)\, x - (\lambda - 1)\, y + \mu + 3 = 0$$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda$ και $\mu$ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες και να ορίζουν πάνω στην ευθεία $(\delta): 2x + y - 8 = 0$ τμήμα μήκους $2\sqrt{5}$.

146. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): (\mu + 1)\, x - (\mu - 1)\, y - (\mu + 1) = 0$$

$$(\varepsilon_2): (\mu + 2)\, x - \mu y - \mu = 0$$

(α΄) Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το σημείο τομής τους.

(β΄) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι παραπάνω ευθείες να είναι κάθετες.

147. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): y = 3x$$

$$(\varepsilon_2): y = -2x$$

Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες.

148. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): y = \mu x$$

$$(\varepsilon_2): (1 + \mu)\, x = (1 - \mu)\, y$$

Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες.

149. Δίνεται η εξίσωση:

$$\left(2\lambda^2 - \lambda - 1\right) x - \left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) y - \left(\lambda^2 + 2\lambda - 2\right) = 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

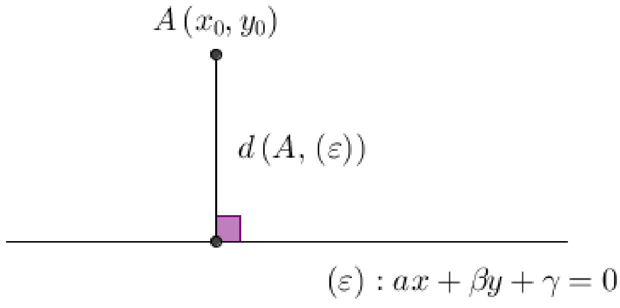
150. Δίνεται η εξίσωση:

$$\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right) x + \left(2\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) y - 3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

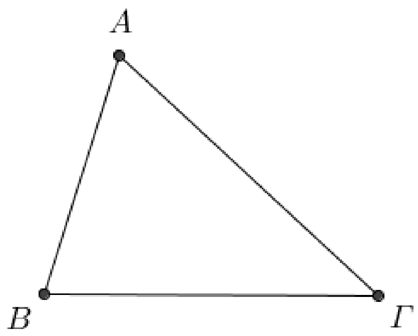
(β΄) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

## 2.3 Απόσταση και εμβαδόν




Η απόσταση του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon) : ax + \beta y + \gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(A, (\varepsilon)) = \frac{|ax_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}$$




Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

151. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A\,(1,4)$ από την ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 1$.

152. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A\,(1,-1)$, $B\,(2,3)$ και $\Gamma\,(-5,7)$.

153. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$$

$$(\varepsilon_2): 4x - 3y - 24 = 0$$

Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών.

154. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 3x + y - \lambda = 0$$

$$(\varepsilon_2): 3x + 4y + 6 = 0$$

$$(\varepsilon_3): 6x + 5y - 9 = 0$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\lambda$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon_1)$ να απέχει από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_2)$ και $(\varepsilon_3)$ απόσταση ίση με 4.

155. Δίνεται η ευθεία:

$$(\varepsilon): \kappa x - (\kappa + 1)\,y + \kappa^2 + \kappa = 0$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\kappa$ ώστε η ευθεία να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 1.

156. Δίνονται τα σημεία $A\,(2,0)$, $B\,(4,5)$ και $\Gamma\,(6,\kappa)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R} - \{10\}$.

(α′) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A, B, \Gamma$ δεν είναι συνευθειακά.

(β′) Να βρείτε την εξίσωση του φορέα $(\varepsilon)$ της διαμέσου που φέρνουμε από την κορυφή $B$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(γ′) Αν $(AB\Gamma) = 8$, να προσδιορίσετε το σημείο $\Gamma$.

(δ′) Για $\kappa = 2$, να βρείτε την εξίσωση του φορέα $(\eta)$ της ευθείας του ύψους που φέρνουμε από την κορυφή $A$ του τριγώνου $AB\Gamma$, καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής $\Delta$ των ευθειών $(\varepsilon)$ και $(\eta)$.

157. Δίνονται τα σημεία $A\,(1,3)$, $B\,(-2,2)$ και η ευθεία:

$$(\varepsilon): 3x + y + \alpha = 0$$

(α′) Αν η απόσταση του $A$ από το $B$ ισούται με την απόσταση του $A$ από την $(\varepsilon)$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$.

(β′) Για $\alpha = 4$, να βρείτε:

i. το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A, B$ καθώς και το σημείο $\Gamma$ που η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει τον άξονα $y'y$.

ii. Ποιό σημείο της ευθείας $(\varepsilon)$ έχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων;

158. Να βρείτε ένα σημείο της ευθείας $(\varepsilon): 2x - 3y = 30$ το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(7,9)$.

159. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x - 2y + 1 = 0$. Να βρείτε σημείο του άξονα $y'y$ το οποίο να ισαπέχει από τον άξονα $x'x$ και από την ευθεία $(\varepsilon)$.

160. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon): x - y + 2 = 0$$

$$(\zeta): 12x - 5y + 60 = 0$$

Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $(\varepsilon)$ τα οποία απέχουν από την ευθεία $(\zeta)$ απόσταση ίση με 1.

161. Δίνεται το σημείο $A(2,-1)$ και η ευθεία:

$$(\varepsilon): x - y - 4 = 0$$

(α′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\eta)$ που διέρχεται από το σημείο $A$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon)$.

(β′) Να βρείτε τα σημεία $B$ και $\Gamma$ της ευθείας $(\varepsilon)$ τα οποία απέχουν από το $A$ απόσταση ίση με 5.

(γ′) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

162. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$, $B(3,-5)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 7x + y - 23 = 0$. Να βρεθεί σημείο $M$ της ευθείας $(\varepsilon)$ ώστε το τρίγωνο $AMB$ να είναι ορθογώνιο στο $M$.

163. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A$ και $B$ αντίστοιχα, ώστε το άθροισμα της τετμημένης του $A$ και της τεταγμένης του $B$ να είναι ίσο με 15.

164. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + 5$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην $(\varepsilon)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4.

165. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχουν από τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(0,2)$.

166. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και απέχουν από το σημείο $A(-1,3)$ απόσταση ίση με 1.

167. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1,1)$ και απέχουν από το σημείο $B(2,4)$ απόσταση ίση με 1.

168. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(1,2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4.

169. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και η οποία τέμνει την ευθεία $(\delta): x - y + 1 = 0$ σε σημείο $B$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $OAB$ να είναι ίσο με 5.

170. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $A(1,2)$, $(AB\Gamma) = 8$ και ο φορέας της βάσης του $B\Gamma$ είναι η ευθεία με εξίσωση:

$$(\varepsilon): x - y - 1 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου.

171. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): (\lambda + 1)\,x - 3y - \mu = 0$$

$$(\varepsilon_2): 3x - 2\mu y + 3\mu - 2\lambda = 0$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\lambda$ και $\mu$ για τις οποίες οι ευθείες είναι κάθετες και ισαπέχουν από το σημείο $A(-4,2)$.

172. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x + \mu y + 1 = 0$$

$$(\varepsilon_2): 2\mu x + 2y + \lambda = 0$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\lambda$ και $\mu$ για τις οποίες οι ευθείες είναι παράλληλες και η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

## 2.4 Γεωμετρικοί τόποι

173. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 3x + y + 4 = 0$$

$$(\varepsilon_2): 3x + y + 8 = 0$$

Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλής τους.

174. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 3x - 4y + 1 = 0$$

$$(\varepsilon_2): 5x + 12y + 4 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν τεμνόμενες οι ευθείες.

175. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 3x - 6y + 2 = 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.

(β΄) Να υπολογίσετε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών.

(γ΄) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των δύο παραλλήλων ευθειών.

176. Δίνονται τα σημεία $A\left(-1,-2\right)$ και $B\left(3,1\right)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M$ για τα οποία ισχύει $(MAB)=8$.

177. Δίνονται τα σημεία $A\left(3,4\right)$ και $B\left(5,-2\right)$.

(α΄) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M$ για τα οποία ισχύει $MA=MB$.

(β΄) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M$ για τα οποία ισχύει $(MAB)=10$.

(γ΄) Να βρείτε τα σημεία $M$ για τα οποία ισχύει $MA=MB$ και $(MAB)=10$.

178. Δίνονται τα σημεία $A\left(2,0\right)$, $B\left(-1,1\right)$ και $\varGamma\left(3,-1\right)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M$ για τα οποία ισχύει:

$$3MA^2+MB^2-4M\varGamma^2=2$$

179. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\varGamma\varDelta$ με $A\left(-2,-1\right)$, $B\left(2,-1\right)$, $\varGamma\left(2,1\right)$ και $\varDelta\left(-2,1\right)$. Για ένα τυχαίο σημείο $M$ του επιπέδου θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{\alpha}=2\overrightarrow{M\varDelta}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M\varGamma}\ \text{ και }\ \overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\varGamma}$$

Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ είναι συγγραμμικά, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου $M$.

180. (α΄) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(2\lambda-1,\lambda+1\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, ανήκουν σε ευθεία $(\varepsilon)$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(β΄) Θεωρούμε και την ευθεία:

$$(\zeta):\lambda x+\left(\lambda-1\right)y-1=0$$

Να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών $(\varepsilon)$ και $(\zeta)$.

(γ΄) Στην περίπτωση που οι ευθείες είναι παράλληλες, να υπολογίσετε την απόστασή τους.

181. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1):\lambda x+\left(\lambda-1\right)y=2\lambda$$

$$(\varepsilon_2):\left(\lambda+1\right)x+\lambda y=2\lambda+1$$

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και στην συνέχεια να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής.

182. Δίνονται τα σημεία $A\left(3-\lambda,\lambda\right)$, $B\left(2\lambda,4+3\lambda\right)$ και $\varGamma\left(\lambda+2,1-\lambda\right)$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι τα σημεία είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(β΄) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου $AB\varGamma$.

183. Δίνεται τρίγωνο $AB\varGamma$ με $\overrightarrow{AB}=\left(4,3\right)$ και $\overrightarrow{A\varGamma}=\left(3,1\right)$.

(α′) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(β′) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.

(γ′) Αν το σημείο $A$ κινείται πάνω στην ευθεία $2x + y = 4$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της κορυφής $B$.

184. Ορθή γωνία στρέφεται γύρω από το σημείο $P\,(1,3)$ και οι πλευρές της τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A$ και $B$ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου $M$ του ευθύγραμμου τμήματος $AB$.

185. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\,(0,4)$, $B\,(-2,0)$ και $\Gamma\,(6,0)$. Θεωρούμε επίσης μεταβλητό σημείο $P\,(\lambda,0)$ της πλευράς $B\Gamma$ με $-2 < \lambda < 6$. Από το σημείο $P$ φέρνουμε ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ παράλληλες αντίστοιχα στις πλευρές $A\Gamma$ και $AB$ οι οποίες τέμνουν τις ευθείες $AB$ και $A\Gamma$ στα σημεία $\Delta$ και $E$ αντίστοιχα.

(α′) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\Delta$ και $E$.

(β′) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $A\Delta PE$.

(γ′) Για ποιά τιμή του πραγματικού αριθμού $\lambda$ το παραπάνω εμβαδόν είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$;

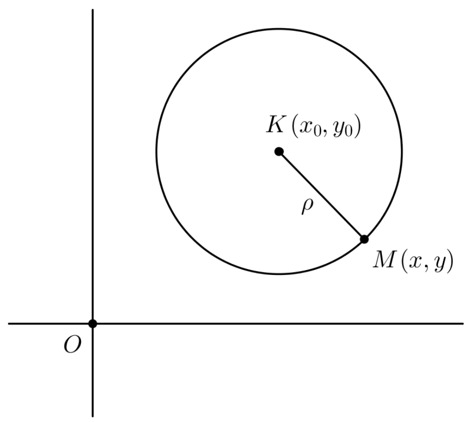
(δ′) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του κέντρου του παραλληλογράμμου όταν το σημείο $P$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $AB$.

# 3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

## 3.1 Ο κύκλος

Κύκλο με κέντρο $K$ και ακτίνα $\rho$ (συμβολίζουμε $(K,\rho)$) ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M$ του επιπέδου με την ιδιότητα:

$$\left|\overrightarrow{KM}\right| = \rho$$




*Πρόταση 1:* Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K\,(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho$ είναι:

$$C : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

*Απόδειξη:* Για ένα τυχαίο σημείο $M\,(x,y)$ του κύκλου έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{KM}\right| &= \rho \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &= \rho \\ \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= \rho^2 \end{aligned}$$

*Πρόταση 2:* Η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + ax + \beta y + \gamma = 0$$

παριστάνει κύκλο υπό την προϋπόθεση ότι $a^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$.
Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+\beta^2-4\gamma}$.

*Απόδειξη:* Ένας κύκλος με κέντρο $K\,(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho$ είδαμε ότι έχει εξίσωση:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να πάρει την μορφή:

$$x^2 + y^2 - 2x_0 \cdot x - 2y_0 \cdot y + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Θέτοντας $a = -2x_0$, $\beta = -2y_0$ και $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$ έχουμε το ζητούμενο.
Αντίστροφα, έστω:

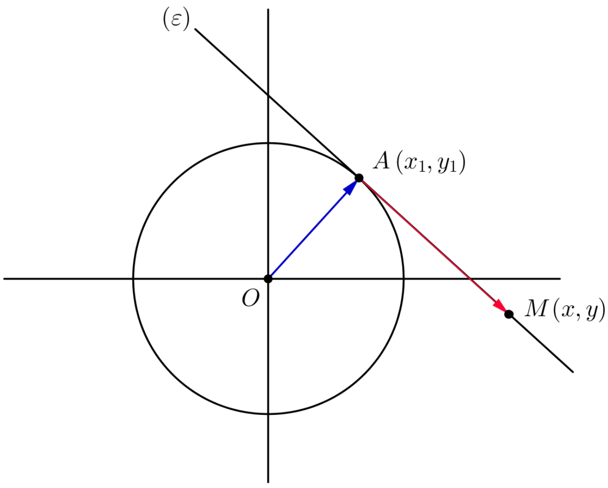
$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + ax + \beta y + \gamma &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a^2}{4} + y^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2} \cdot y + \frac{\beta^2}{4} &=& \ \frac{a^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \\ \Leftrightarrow \ & \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 &=& \ \frac{a^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} \end{aligned}$$

Επομένως αν $a^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\frac{a^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \beta^2 - 4\gamma}$.

### 3.1.1 Η εφαπτομένη του κύκλου

Αν θεωρήσουμε έναν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho$, θα έχει εξίσωση:

$$C : x^2 + y^2 = \rho^2$$




Έστω ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης $(\varepsilon)$ στο σημείο $A$ ισχύει:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA} &\perp& \ \overrightarrow{AM} \\ \Leftrightarrow \ & \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & (x_1, y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & x_1 (x - x_1) + y_1 (y - y_1) &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & x_1 \cdot x - x_1^2 + y_1 \cdot y - y_1^2 &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & x_1 \cdot x + y_1 \cdot y &=& \ x_1^2 + y_1^2 \end{aligned}$$

Όμως αφού το σημείο $A$ ανήκει στον κύκλο ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης παίρνει την μορφή:

$$(\varepsilon) : x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

186. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

(α′) έχει κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

(β′) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon) : x - 2y - 5 = 0$.

187. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

(α′) έχει κέντρο το σημείο $K(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(\sqrt{3},0\right)$.

(β′) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(1,4)$ και $B(-3,2)$.

(γ′) είναι ομόκεντρος με τον κύκλο $C : x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

188. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παρακάτω κύκλων:

$i)$ $C : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

$ii)$ $C : 3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 1 = 0$

189. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 - \kappa^2 = 0 \ , \ \kappa \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Για $\kappa = 1$ :

(β′) Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

(γ′) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Lambda(3,-2)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

190. Δίνεται ο κύκλος:

$$C : x^2 + y^2 - 2x = 0$$

και η ευθεία:

$$(\varepsilon) : y = \lambda x + 2$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\lambda$ για την οποία η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.

191. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου:

(α′) $C : x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του $A(4,3)$.

(β′) $C : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$ στο σημείο του $B(1,3)$.

(γ′) $C : x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$ στο σημείο του $\Gamma(1,-1)$.

192. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(2,1)$, $B(-1,4)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon) : 4x - 5y + 11 = 0$.

193. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,0)$, $B(8,0)$ και $\Gamma(0,-2)$.

194. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(3,-1)$ και αποκόπτει από την ευθεία $(\varepsilon): 2x-5y+18=0$ χορδή μήκους 6.

195. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x=3$ στο σημείο της $B(3,1)$.

196. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $B(3,0)$.

197. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$, $B(-5,0)$ και εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

198. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(3,4)$, $B(4,5)$ και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στον κύκλο $C: x^2+y^2=50$.

199. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ , $B(5,6)$, $\Gamma(9,3)$ και $\Delta(5,0)$.
   (α′) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
   (β′) Να βρείτε την εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου στον παραπάνω ρόμβο.

200. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $C: x^2+y^2=4$ που έχει μέσον το σημείο $M(1,-1)$.

201. Δίνεται ο κύκλος:
$$C: (x-3)^2+(y+1)^2=20$$
Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(5,3)$.

202. Δίνεται ο κύκλος:
$$C: (x-1)^2+(y-1)^2=1$$
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία του $A(1,0)$, $B(0,1)$ και $\Gamma\left(\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Να βρείτε επίσης την εξίσωση της υποτείνουσάς του.

203. Δίνεται ο κύκλος:
$$C: x^2+y^2+4x-8y+4=0$$
και η ευθεία:
$$(\varepsilon): (\sigma\upsilon\nu\phi)\,x+(\eta\mu\phi)\,y=4\eta\mu\phi-2\sigma\upsilon\nu\phi+4$$
Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο για κάθε $\phi\in\mathbb{R}$.

204. Δίνεται ο κύκλος:
$$C : x^2 + y^2 = 5$$
Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου που:

(α΄) είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : y = 2x + 3$.

(β΄) διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$.

205. Δίνεται ο κύκλος:
$$C : x^2 + y^2 = 10$$
Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου που:

(α΄) είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta) : y = \frac{x}{3}$.

(β΄) διέρχεται από το σημείο $A(-10, 0)$.

206. Θεωρούμε τους κύκλους:
$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$
$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 4$$
Να βρείτε την σχετική θέση των δύο κύκλων.

207. Θεωρούμε τους κύκλους:
$$C_1 : x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$$
$$C_2 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

(β΄) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων.

208. Δίνεται ο κύκλος:
$$C : x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$$
και η ευθεία:
$$(\varepsilon) : x - 7y + 29 = 0$$

(α΄) Να βρείτε τα σημεία τομής $B$ και $\Gamma$ της ευθείας και του κύκλου.

(β΄) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία $B$ και $\Gamma$ και να δείξετε ότι είναι κάθετες.

(γ΄) Αν $A$ είναι το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(δ΄) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

209. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M$, των οποίων ο λόγος των αποστάσεών τους από τα σημεία $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$ είναι σταθερός και ίσος με 2.

210. Δίνεται η εξίσωση:
$$x^2 + y^2 + 4x - 2\lambda y = 0$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποιά τιμή του $\lambda$ ο κύκλος διέρχεται από το σημείο $M(\lambda, 1)$;

(γ′) Για ποιά τιμή του $\lambda$ η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\sqrt{5}$;

(δ′) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

(ε′) Για ποιά τιμή του $\lambda$ ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $y'y$;

(ϛ′) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η εξίσωση διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

211. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2(\sigma\upsilon\nu\vartheta)x - 2(\eta\mu\vartheta)y - 1 = 0\ ,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\vartheta \in [0, 2\pi]$ και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β′) Αν $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $M(1, 2)$.

(γ′) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\vartheta$, τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

212. Δίνεται ο κύκλος:

$$C : x^2 + y^2 - x - 2 = 0$$

και η ευθεία:

$$(\varepsilon) : 5x + 3y + 2 = 0$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία.

(β′) Έστω $M$ και $N$ τα κοινά σημεία του κύκλου και της ευθείας. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2)$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $M$ και $N$.

(γ′) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση.

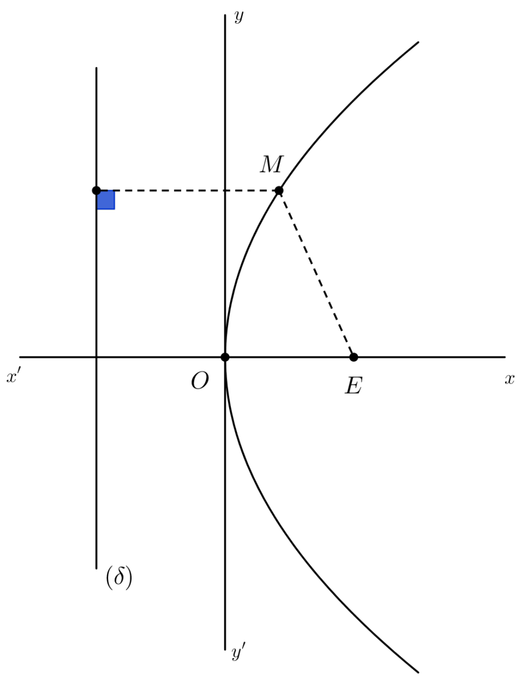
## 3.2 Η παραβολή

Στο επίπεδο θεωρούμε μία ευθεία $(\delta)$ και ένα σημείο $E$ που δεν ανήκει στην $(\delta)$. Ονομάζουμε **παραβολή** με **εστία** το σημείο $E$ και **διευθετούσα** την ευθεία $(\delta)$ τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από το σημείο $E$ και την ευθεία $(\delta)$.

Για λόγους απλοποίησης των εξισώσεων θεωρούμε ότι ο άξονας $x'x$ διέρχεται από την εστία της παραβολής και είναι κάθετος στην διευθετούσα της παραβολής. Λόγω του ορισμού της παραβολής, το μέσον της απόστασης της εστίας από την διευθετούσα ανήκει στην παραβολή και το σημείο αυτό θα θεωρήσουμε ότι είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Το σημείο αυτό ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής. Με βάση αυτήν την τοποθέτηση της εστίας και της διευθετούσας υπάρχει ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός $p$, ο οποίος ονομάζεται **παράμετρος** της παραβολής, ώστε $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και $(\delta): x=-\frac{p}{2}$.

Αφού για το τυχαίο σημείο $M$ της παραβολής ισχύει $ME=d\left(M,(\delta)\right)$, η εξίσωσή της παίρνει την μορφή:

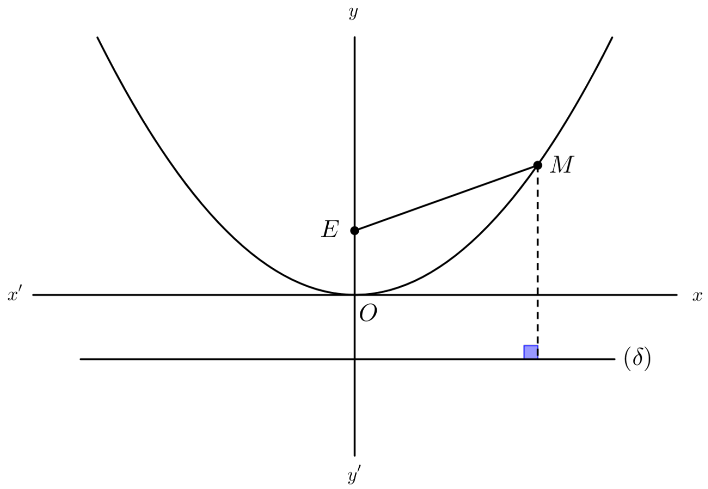
$$C: y^2=2px$$




Η παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα $(\delta): x=-\frac{p}{2}$

Θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε ότι ο άξονας $y'y$ διέρχεται από την εστία της παραβολής και ότι η διευθετούσα της παραβολής είναι κάθετη στον άξονα $y'y$. Τότε η εστία της θα είναι το σημείο $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και η διευθετούσα θα είναι η ευθεία $(\delta): y=-\frac{p}{2}$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της παραβολής παίρνει την μορφή:

$$C: x^2=2py$$




Η παραβολή με εστία $E\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $(\delta): y=-\dfrac{p}{2}$

### 3.2.1 Ιδιότητες της παραβολής

Για την παραβολή με εξίσωση:

$$y^2 = 2px$$

έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- Για κάθε σημείο $M$ της παραβολής ισχύει η ισότητα:

$$d\left(M,(\delta)\right) = \left|\overrightarrow{ME}\right|$$

- Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Δηλαδή αν το σημείο $M\left(x,y\right)$ ανήκει στην παραβολή, το ίδιο συμβαίνει και για το σημείο $M'\left(x,-y\right)$.

### 3.2.2 Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2=2px$ στο σημείο της $A\left(x_1,y_1\right)$ είναι:

$$(\varepsilon): y_1\cdot y = p\left(x+x_1\right)$$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: x^2=2py$ στο σημείο της $A\left(x_1,y_1\right)$ είναι:

$$(\varepsilon): x_1\cdot x = p\left(y+y_1\right)$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

213. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $x'x$ όταν:

   (α΄) έχει εστία το σημείο $E(-2,0)$.

   (β΄) έχει διευθετούσα την ευθεία $(\delta): x = -1$.

   (γ΄) διέρχεται από το σημείο $A\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

214. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα των παρακάτω παραβολών:

   $i)\ C : y^2 = -8x$

   $ii)\ C : y = \dfrac{3}{2}x^2$

215. Δίνεται η παραβολή:
$$C : y^2 = -4x$$
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την εστία της παραβολής και σχηματίζει γωνία $135^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

216. Δίνεται η παραβολή:
$$C : x^2 = 4y$$
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία της $A(4,4)$ και $B\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$ τέμνονται κάθετα πάνω στην διευθετούσα της παραβολής.

217. Δίνεται η παραβολή:
$$C : y^2 = 2x$$
Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(2,2)$.

218. Δίνεται η παραβολή:
$$C : y^2 = 12x$$
Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A\left(1, 2\sqrt{3}\right)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EAB$, όπου $E$ η εστία της παραβολής, είναι ισόπλευρο.

219. Δίνεται η παραβολή:
$$C : y^2 = 4x$$
και η ευθεία:
$$(\varepsilon) : y = -2x + 12$$
Η ευθεία τέμνει την παραβολή στα σημεία $A$ και $B$. Οι εφαπτομένες της παραβολής στα $A$ και $B$ τέμνονται στο σημείο $\mathit{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\mathit{\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

220. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 2px$$

Έστω $A(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο της παραβολής διαφορετικό από την κορυφή της $O$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο $A$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $y'y$ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα $AB$.

221. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y = \frac{1}{4}x^2$$

Να βρείτε δύο σημεία $A$ και $B$ της παραβολής που έχουν την ίδια τεταγμένη και για τα οποία ισχύει $A\hat{O}B = 90°$.

222. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y = \frac{1}{4}x^2$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που:

(α′) είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : y = x + 1$.

(β′) διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$.

223. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 4x$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που:

(α′) είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta) : x + y = 0$.

(β′) διέρχεται από το σημείο $A\left(-2, \frac{1}{6}\right)$.

224. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 18x$$

και η ευθεία:

$$(\varepsilon) : 3x + 2y + 6 = 0$$

Να εξετάσετε αν η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής.

225. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 2px$$

Έστω $(\varepsilon)$ η εφαπτομένη της παραβολής σε ένα τυχαίο σημείο της $A(x_1, y_1)$ που είναι διαφορετικό από την κορυφή της $O$. Η ευθεία $OA$ τέμνει την διευθετούσα $(\delta)$ της παραβολής στο σημείο $B$. Αν $E$ είναι η εστία της παραβολής, να αποδείξετε ότι $BE // (\varepsilon)$.

226. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 2px$$

Έστω $(\varepsilon)$ η εφαπτομένη της παραβολής σε ένα τυχαίο σημείο της $A(x_1, y_1)$ που είναι διαφορετικό από την κορυφή της $O$. Από το $O$ φέρνουμε την κάθετη ευθεία $(\zeta)$ προς την εφαπτομένη $(\varepsilon)$, η οποία τέμνει την $(\varepsilon)$ στο σημείο $\Gamma$ και επανατέμνει την παραβολή στο σημείο $B$.

(α′) Να αποδείξετε ότι:

$$O\Gamma = \frac{|px_1|}{\sqrt{p^2 + y_1^2}}$$

(β′) Να δείξετε ότι η τετμημένη του σημείου $B$ είναι ίση με $\frac{p^2}{x_1}$.

(γ′) Να αποδείξετε ότι:

$$OB \cdot O\Gamma = p^2$$

227. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 4x$$

Θεωρούμε το σημείο $P\left(t^2, 2t\right)$ της παραβολής με $t \in \mathbb{R}^*$.

(α′) Να δείξετε ότι η κάθετη της παραβολής στο σημείο $P$ έχει εξίσωση:

$$(\delta) : y + tx = 2t + t^3$$

(β′) Η ευθεία $(\delta)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $T$. Αν $N$ είναι το μέσον του $PT$, να βρείτε την καμπύλη την οποία διαγράφει το σημείο $N$ όταν το $P$ κινείται πάνω στην παραβολή.

(γ′) Αν $E$ είναι η εστία της παραβολής, να δείξετε ότι οι ευθείες $EN$ και $PT$ είναι κάθετες.

(δ′) Αν το τρίγωνο $EPT$ είναι ισόπλευρο, να προσδιορίσετε το σημείο $P$.

228. Δίνεται η παραβολή:

$$C : y^2 = 4x$$

Μία μεταβλητή ευθεία $(\varepsilon)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq 0$ διέρχεται από την εστία $E$ της παραβολής και την τέμνει στα σημεία $A\left(x_1, y_1\right)$ και $B\left(x_2, y_2\right)$.

(α′) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $x_1$ και $x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$\lambda^2 x^2 - 2\left(\lambda^2 + 2\right)x + \lambda^2 = 0$$

(β′) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ για την οποία ισχύει $AB = \frac{40}{9}$.

(γ′) Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα ποια είναι η ευθεία $(\varepsilon)$ ισχύει:

$$\frac{1}{AE} + \frac{1}{BE} = 1$$

## 3.3 Η έλλειψη

Στο επίπεδο θεωρούμε δύο σημεία $E$ και $E'$. Ονομάζουμε έλλειψη με **εστίες** τα σημεία $E$ και $E'$ τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα σημεία $E$ και $E'$ είναι σταθερό και μεγαλύτερο από την απόσταση $EE'$.

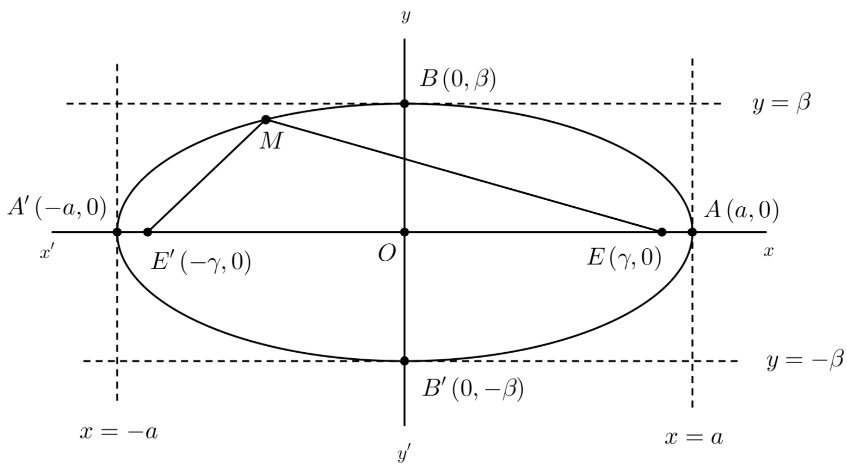
Την απόσταση $EE'$ την ονομάζουμε **εστιακή απόσταση** και την συμβολίζουμε $2\gamma$.

Το σταθερό άθροισμα των σημείων της έλλειψης από τις εστίες το συμβολίζουμε με $2a$.

Για λόγους απλοποίησης των εξισώσεων θεωρούμε ότι ο άξονας $x'x$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης και ότι η αρχή των αξόνων είναι το μέσον της εστιακής απόστασης, οπότε αυτές έχουν συντεταγμένες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$.

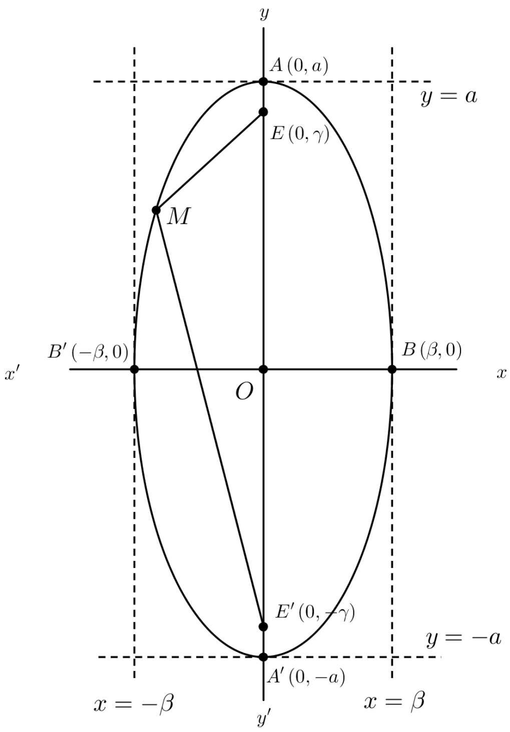
Αφού για το τυχαίο σημείο $M$ της έλλειψης ισχύει $\left|\overrightarrow{ME}\right| + \left|\overrightarrow{ME'}\right| = 2a$, η εξίσωσή της παίρνει την μορφή:

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad , \quad \text{όπου} \quad \beta^2 = a^2 - \gamma^2$$




Θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε ότι ο άξονας $y'y$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης και ότι η αρχή των αξόνων είναι το μέσον της εστιακής απόστασης. Τότε οι εστίες της είναι τα σημεία $E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$ και η εξίσωση της έλλειψης παίρνει την μορφή:

$$C : \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \quad \text{όπου} \quad \beta^2 = a^2 - \gamma^2$$




*Προσοχή:* Για να καταλάβουμε σε ποιόν άξονα βρίσκονται οι εστίες μιας έλλειψης πρέπει να κοιτάξουμε αν ο μεγαλύτερος αριθμός βρίσκεται κάτω από το $x^2$ ή κάτω από το $y^2$. Αν είναι κάτω από το $x^2$, οι εστίες της είναι στον άξονα $x'x$, ενώ αν είναι κάτω από το $y^2$, οι εστίες της είναι στον άξονα $y'y$.

### 3.3.1 Ιδιότητες της έλλειψης με εστίες στον άξονα $x'x$.

- Για κάθε σημείο $M$ της έλλειψης ισχύει η ισότητα:

$$ME + ME' = 2a$$

- Η έλλειψη έχει άξονες συμμετρίας τους δύο άξονες συντεταγμένων και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Δηλαδή αν το σημείο $M\,(x,y)$ ανήκει στην έλλειψη, το ίδιο συμβαίνει και για τα σημεία $M_1\,(x,-y)$, $M_2\,(-x,y)$ και $M_3\,(-x,-y)$.
- Τα σημεία $A'\,(-a,0)$ και $A\,(a,0)$ λέγονται **κύριες κορυφές** της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα $AA' = 2a$ λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης.
- Τα σημεία $B'\,(0,-\beta)$ και $B\,(0,\beta)$ λέγονται **δευτερεύουσες κορυφές** της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα $BB' = 2\beta$ λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης.
- Κάθε χορδή της έλλειψης που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ονομάζεται **διάμετρος** της έλλειψης. Η μεγαλύτερη διάμετρος της έλλειψης είναι ο μεγάλος της άξονας και η μικρότερη διάμετρός της είναι ο μικρός της άξονας. Για δύο οποιαδήποτε σημεία $M_1$, $M_2$ της έλλειψης ισχύει:

$$2\beta \leq M_1M_2 \leq 2a$$

- Η έλλειψη βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=a$, $x=-a$, $y=\beta$ και $y=-\beta$.
- Στην έλλειψη ισχύει $a > \gamma$. Ο αριθμός $\epsilon = \dfrac{\gamma}{a} < 1$ ονομάζεται **εκκεντρότητα** της έλλειψης.

  Δύο ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα λέγονται **όμοιες**. Για την εκκεντρότητα ισχύει:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^2}$$

### 3.3.2 Η εξίσωση της εφαπτομένη της έλλειψης

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A\left(x_1, y_1\right)$ είναι:

$$(\varepsilon) : \frac{x_1 \cdot x}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y}{\beta^2} = 1$$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : \dfrac{x^2}{\beta^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ στο σημείο της $A\left(x_1, y_1\right)$ είναι:

$$(\varepsilon) : \frac{x_1 \cdot x}{\beta^2} + \frac{y_1 \cdot y}{a^2} = 1$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

229. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης όταν:

(α′) έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10.

(β′) έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$, $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$.

(γ′) διέρχεται από τα σημεία $M(1,1)$ και $N\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

230. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες, τις κορυφές και την εκκεντρότητα των παρακάτω ελλείψεων:

$i)$ $C: x^2+4y^2=4$

$ii)$ $C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

231. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: x^2+2y^2=4$$

Αν $E, E'$ είναι οι εστίες της και $BB'$ ο μικρός της άξονας, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBE'B'$ είναι τετράγωνο.

232. Δίνονται οι ελλείψεις:

$$C_1: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

$$C_2: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις είναι όμοιες.

233. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: x^2+5y^2=20$$

Αν $E, E'$ είναι οι εστίες της, να βρείτε τα σημεία $M$ της έλλειψης για τα οποία ισχύει $ME \perp ME'$.

234. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: 3x^2+y^2=48$$

Να βρείτε την γωνία των εφαπτομένων της έλλειψης που άγονται από το σημείο $P(8,0)$.

235. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: 2x^2+3y^2=35$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης στα σημεία της $M$ που απέχουν από το κέντρο της απόσταση ίση με $\sqrt{17}$.

236. (α′) Δίνεται η έλλειψη:

$$C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και η ευθεία:

$$(\varepsilon) : Ax + By + \Gamma = 0$$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία είναι εφαπτομένη της έλλειψης αν και μόνο αν:

$$A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 = \Gamma^2$$

(β′) Δίνεται η έλλειψη και ο κύκλος:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 576$$

$$C_2 : x^2 + (y-2)^2 = 32$$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των δύο σχημάτων.

237. Δίνεται η έλλειψη:

$$C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ , \ \alpha > \beta$$

Θεωρούμε το σημείο $\Sigma\,(0, 2\beta)$. Μία ευθεία $(\varepsilon)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$ διέρχεται από το σημείο $\Sigma$ και τέμνει τις εφαπτομένες, στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, στα σημεία $M$ και $M'$.

(α′) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο $MM'$ συναρτήσει του $\lambda$.

(β′) Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$, ο κύκλος αυτός διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης;

238. (α′) Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : x = \dfrac{9}{2}$ και το σημείο $E\,(2, 0)$. Αν $M$ είναι μεταβλητό σημείο του επιπέδου, $N$ είναι η προβολή του $M$ στην $(\varepsilon)$ και ισχύει:

$$9\left|\overrightarrow{ME}\right|^2 - 4\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = 0$$

να δείξετε ότι το σημείο Μ κινείται πάνω σε μία έλλειψη.

(β′) Αν $M_1, M_2$ είναι δύο σημεία της έλλειψης με τεταγμένη ίση με $\sqrt{5}\eta\mu\vartheta$, $\vartheta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, τέτοια ώστε οι εφαπτομένες της έλλειψης στα σημεία αυτά να είναι κάθετες, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\vartheta$.

239. Δίνεται η έλλειψη:

$$C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Έστω $M\,(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi, \beta\eta\mu\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, σημείο της έλλειψης.

(α′) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο $M$.

(β′) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών $E$ και $E'$ της έλλειψης από την παραπάνω εφαπτομένη είναι σταθερό.

(γ′) Για ποιά τιμή του $\varphi$ το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η εφαπτομένη στο $M$ με τους άξονες γίνεται ελάχιστο;

240. Δίνεται η έλλειψη:
$$C : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$
Θεωρούμε επίσης την ευθεία:
$$(\varepsilon) : y = \lambda x + 1 \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία.

(β′) Αν $K$ και $\varLambda$ είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με την ευθεία $(\varepsilon)$ και ισχύει $K\hat{O}\varLambda = 90°$, όπου $O$ η αρχή των αξόνων, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$.

241. Θεωρούμε την έλλειψη:
$$C : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$
Έστω $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ οι εφαπτομένες της έλλειψης στις δευτερεύουσες κορυφές της $B$ και $B'$ αντίστοιχα. Μία ευθεία $(\varepsilon)$ με θετικό συντελεστή διεύθυνσης διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ στα σημεία $\varGamma$ και $\varDelta$ αντίστοιχα.

(α′) Αν $\varGamma\varDelta = 2\sqrt{5}$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$.

(β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο $M$ του επιπέδου ισχύει:
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{M\varGamma} + \overrightarrow{M\varDelta}$$

(γ′) Να βρείτε την δεύτερη εφαπτομένη $(\varepsilon_3)$ της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $\varGamma$.

(δ′) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν τεμνόμενες οι ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_3)$ και να δείξετε ότι η γωνία αυτή είναι μικρότερη από $30°$.

242. Θεωρούμε την έλλειψη:
$$C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ , \ \alpha > \beta$$

(α′) Έστω $M(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο της έλλειψης και $E(\gamma, 0)$ η δεξιά εστία της. Να δείξετε ότι:
$$ME = \alpha - \epsilon \cdot x_1$$
όπου $\epsilon$ είναι η εκκετρότητα της έλλειψης.

(β′) Θεωρούμε την ευθεία $(\delta) : x = \dfrac{\alpha^2}{\gamma}$, η οποία ονομάζεται **διευθετούσα** της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{ME}{d(M, (\delta))} = \epsilon$$

243. Δίνεται η έλλειψη:
$$C : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$
Θεωρούμε το σημείο $T(4\sigma\upsilon\nu\vartheta, 3\eta\mu\vartheta)$, $0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$, της έλλειψης. Από το $T$ φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$ που τέμνει ξανά την έλλειψη στο σημείο $P$ και ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ που τέμνει ξανά την έλλειψη στο σημείο $\varSigma$.

(α′) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας $P\varSigma$ είναι:
$$3(\eta\mu\vartheta)\,x + 4(\sigma\upsilon\nu\vartheta)\,y = 0$$

(β′) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο $T$ είναι:

$$(\varepsilon): 4\,(\eta\mu\vartheta)\,x - 3\,(\sigma\upsilon\nu\vartheta)\,y = 7\eta\mu\vartheta \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$$

(γ′) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής της ευθείας $P\Sigma$ και της ευθείας $(\varepsilon)$.

## 3.4 Η υπερβολή

Στο επίπεδο θεωρούμε δύο σημεία $E$ και $E'$. Ονομάζουμε υπερβολή με **εστίες** τα σημεία $E$ και $E'$ τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών τους από τα σημεία $E$ και $E'$ είναι σταθερή και μικρότερη από την απόσταση $EE'$.

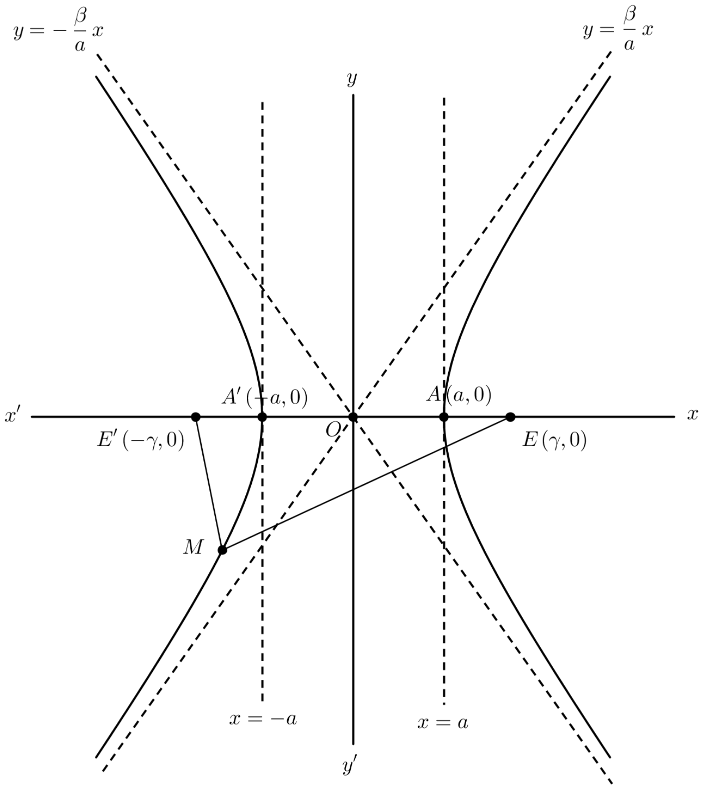
Την απόσταση $EE'$ την ονομάζουμε **εστιακή απόσταση** και την συμβολίζουμε $2\gamma$.

Την απόλυτη τιμή της σταθερής διαφοράς των σημείων της υπερβολής από τις εστίες την συμβολίζουμε με $2a$.

Για λόγους απλοποίησης των εξισώσεων θεωρούμε ότι ο άξονας $x'x$ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής και ότι η αρχή των αξόνων είναι το μέσον της εστιακής απόστασης, οπότε αυτές έχουν συντεταγμένες $E\left(\gamma,0\right)$ και $E'\left(-\gamma,0\right)$.

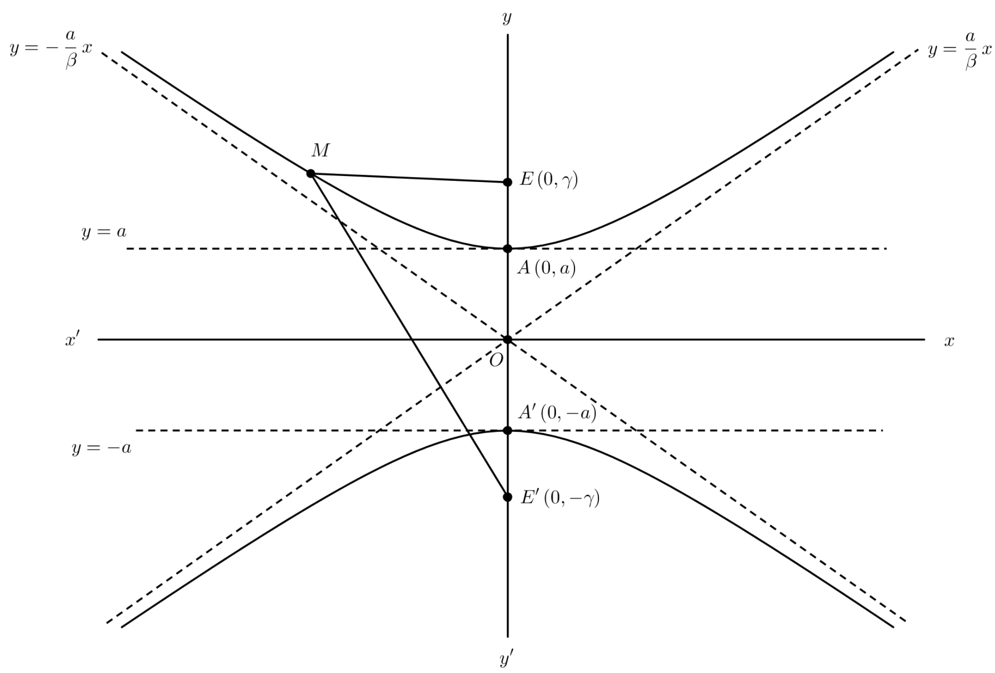
Αφού για το τυχαίο σημείο $M$ της υπερβολής ισχύει $\left|\left|\overrightarrow{ME}\right|-\left|\overrightarrow{ME'}\right|\right|=2a$, η εξίσωσή της παίρνει την μορφή:

$$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \text{όπου} \quad \beta^2=\gamma^2-a^2$$




Θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε ότι ο άξονας $y'y$ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής και ότι η αρχή των αξόνων είναι το μέσον της εστιακής απόστασης. Τότε οι εστίες της είναι τα σημεία $E\left(0,\gamma\right)$ και $E'\left(0,-\gamma\right)$ και η εξίσωση της υπερβολής παίρνει την μορφή:

$$C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad \text{όπου} \quad \beta^2=\gamma^2-a^2$$




*Προσοχή*: Για να καταλάβουμε σε ποιόν άξονα βρίσκονται οι εστίες μιας υπερβολής πρέπει να κοιτάξουμε που βρίσκεται το πρόσημο $+$ στην εξίσωσή της. Αν βρίσκεται με το $x^2$, οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, ενώ αν βρίσκεται με το $y^2$, οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

### 3.4.1 Ιδιότητες της υπερβολής με εστίες στον άξονα $x'x$.

- Για κάθε σημείο $M$ της υπερβολής ισχύει η ισότητα:

$$\left|ME - ME'\right| = 2a$$

- Η υπερβολή έχει άξονες συμμετρίας τους δύο άξονες συντεταγμένων και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Δηλαδή αν το σημείο $M\,(x,y)$ ανήκει στην υπερβολή, το ίδιο συμβαίνει και για τα σημεία $M_1\,(x,-y)$, $M_2\,(-x,y)$ και $M_3\,(-x,-y)$.
- Τα σημεία $A'\,(-a,0)$ και $A\,(a,0)$ λέγονται **κορυφές** της υπερβολής.
- Η υπερβολή βρίσκεται εκτός της ζώνης των παραλλήλων ευθειών $x = a$ και $x = -a$ και έχει δύο κλάδους.
- Στην υπερβολή ισχύει $\gamma > a$. Ο αριθμός $\epsilon = \dfrac{\gamma}{a} > 1$ ονομάζεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής.

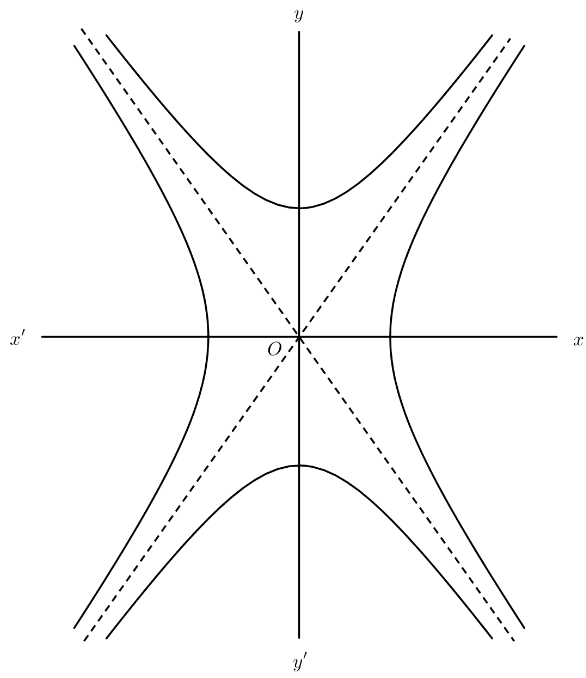
  Για την εκκεντρότητα ισχύει:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2}$$

- Οι ευθείες $y = \dfrac{\beta}{a} \cdot x$ και $y = -\dfrac{\beta}{a} \cdot x$ έχουν την ιδιότητα να πλησιάζουν διαρκώς τους κλάδους της υπερβολής χωρίς ποτέ να τους ακουμπήσουν. Οι δύο αυτές ευθείες ονομάζονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής.
  Οι υπερβολές με εξισώσεις:

$$C_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \;\text{ και }\; C_2 : \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

  έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες και ονομάζονται **συζυγείς**.




Δύο συζυγείς υπερβολές

- Αν σε μία υπερβολή ισχύει $a = \beta$, η υπερβολή έχει εξίσωση:

$$C : x^2 - y^2 = a^2$$

και ονομάζεται **ισοσκελής** υπερβολή. Οι ασύμπτωτες μιας ισοσκελούς υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \pm x$, δηλαδή οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων.

### 3.4.2 Η εξίσωση της εφαπτομένη της υπερβολής

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A\left(x_1, y_1\right)$ είναι:

$$(\varepsilon) : \frac{x_1 \cdot x}{a^2} - \frac{y_1 \cdot y}{\beta^2} = 1$$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C : \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A\left(x_1, y_1\right)$ είναι:

$$(\varepsilon) : \frac{y_1 \cdot y}{a^2} - \frac{x_1 \cdot x}{\beta^2} = 1$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

244. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής όταν:

(α′) έχει εστίες τα σημεία $E'(-13,0)$, $E(13,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(5,0)$ και $A'(-5,0)$.

(β′) έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-10)$, $E(0,10)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$.

(γ′) διέρχεται από το σημείο $M\left(3\sqrt{2},4\right)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\pm\frac{4}{3}x$.

245. Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες των παρακάτω υπερβολών:

$i)\ C: x^2-y^2=4$

$ii)\ C: \frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$

246. Δίνεται η έλλειψη:

$$C: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εκκεντρότητα ίση με 2.

247. Δίνεται η υπερβολή:

$$C: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπρβολής και την ευθεία $(\varepsilon): y=2$.

248. Δίνεται η υπερβολή:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

Αν η ασύμπτωτή της $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $30°$, να υπολογίσετε την εκκεντρότητά της.

249. Δίνεται η υπερβολή:

$$C: \frac{x^2}{4}-y^2=1$$

Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

250. Δίνεται η υπερβολή:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

Η εφαπτομένη της υπερβολής στην κορυφή της $A(\alpha,0)$ τέμνει την ασύμπτωτή της $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο $\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $OE=O\Gamma$, όπου $E$ είναι η δεξιά εστία της υπερβολής.

251. Δίνεται η υπερβολή:

$$C : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $M\left(2\sqrt{2}, 1\right)$ και η κάθετη στην εφαπτομένη στο ίδιο σημείο, τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία $A$ και $B$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $AB$ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

252. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή:

$$C : x^2 - y^2 = 16$$

και η ευθεία:

$$(\varepsilon) : y = 3$$

Η ευθεία τέμνει την υπερβολή στα σημεία $B$ και $B'$. Αν $A$ είναι η δεξιά κορυφή της υπερβολής, να δείξετε ότι το τρίγωνο $ABB'$ είναι ορθογώνιο.

253. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή:

$$C : x^2 - y^2 = 8$$

Θεωρούμε το σημείο $M\left(4, 2\sqrt{2}\right)$ της υπερβολής καθώς και την εφαπτομένη της $(\varepsilon)$ στο σημείο αυτό. Η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής στα σημεία $A$ και $B$.

(α′) Να υπολογίσετε το γινόμενο $(OA)\,(OB)$.

(β′) Να αποδείξετε ότι το $M$ είναι το μέσον του τμήματος $AB$.

(γ′) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OAB$.

254. Δίνεται η υπερβολή:

$$C : \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και τέμνουν την υπερβολή σε σημεία που η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με $\sqrt{29}$.

255. Θεωρούμε τις συζυγείς υπερβολές:

$$C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

$$C_2 : \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$$

Αν $\epsilon_1$ και $\epsilon_2$ είναι οι εκκεντρότητες των δύο υπερβολών αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{1}{\epsilon_1^2} + \frac{1}{\epsilon_2^2}$$