Η ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΟ ΘΕΜΑ Β

1. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \ldots$

   (α′) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

   (β′) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων θετικών περιττών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

   (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

   (β′) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

   (γ′) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x + \left(\lambda^2 + \lambda - 1\right) = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   (α′) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

   (β′) Να λύσετε την ανίσωση:

$$S^2 - P - 2 \geq 0$$

   όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

4. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7$^{\eta}$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

   (α′) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

   (β′) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

5. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης.

(β′) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

6. (α′) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 1| = 3$

(β′) Αν a, β με $a < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να λύσετε την εξίσωση:

$$ax^2 + \beta x + 3 = 0$$

7. (α′) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|2x - 5| \leq 3 \quad \text{και} \quad 2x^2 - x - 1 \geq 0$$

(β′) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του προηγούμενου ερωτήματος.

8. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)\, x = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(β′) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(γ′) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

9. Αν $0 < a < 1$, τότε:

(α′) Να αποδείξετε ότι: $a^3 < a$

(β′) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0 \ , \ a^3 \ , \ 1 \ , \ a \ , \ \frac{1}{a}$$

10. (α′) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

(β′) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε να ισχύει:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

11. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$$

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

(β′) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2 - 5x + 3$

(γ′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in$Α ισχύει: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

12. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 2$

(β′) Να λύσετε την ανίσωση: $|2 - 3x| > 5$

(γ′) Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με την βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

13. Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 - 3x + 1$

(α′) Να βρείτε τις ρίζες του.

(β′) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(γ′) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

14. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3x - 1 < x + 9 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$$

(α′) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(β′) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $f(-1) + f(0) + f(1)$

(β′) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

16. (α′) Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 2| = \sqrt{3}$

(β′) Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος.

17. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $a_3 = 1$ και $a_5 = 4$

(α′) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(β′) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $a_\nu = 2^{\nu-3}$

18. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης.

(β′) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

19. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δύο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άνδρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άνδρας και μία γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

(α′) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

(β′) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
Α: Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης
Β: Να διαγωνίστηκε η Ζωή
Γ: Να μην διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης

20. (α′) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{|x+1|}{3} - \dfrac{|x+1|+4}{5} = \dfrac{2}{3}$

(β′) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

(γ′) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του δεύτερου ερωτήματος.

21. Από τους μαθητές ενός Λυκείου το 25% συμμετέχει στην θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο μαθητής να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα
Β: ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου
τότε:

(α′) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
$i)$ A∪B $ii)$ A∩B $iii)$ B−A $iv)$ A′

(β′) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων:
$i)$ ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου
$ii)$ ο μαθητής που επιλέχθηκε να μην συμμετέχει σε καμία ομάδα

22. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<4$

(β′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$

(γ′) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των παραπάνω ερωτημάτων με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με μορφή διαστήματος.

23. (α′) Αν $a<0$, να αποδειχθεί ότι: $a+\dfrac{1}{a}\leq -2$

(β′) Αν $a<0$, να αποδειχθεί ότι: $|a|+\left|\dfrac{1}{a}\right|\geq 2$

24. (α′) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3\,|x-1|$

(β′) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$

(γ′) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του δεύτερου ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

25. Αν $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

(α′) $x+y$

(β′) $2x-3y$

(γ′) $\dfrac{x}{y}$

26. Δίνεται η εξίσωση:

$$\left(\lambda^2-9\right)x=\lambda^2-3\lambda \quad (1) \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

(α′) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(β′) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(γ′) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

27. (α′) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων: $1,2,3,\ldots$ ν

(β′) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακεραίους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

28. (α′) Αν $a, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{a}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{a}\right| \geq 2 \quad (1)$

(β′) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

29. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \quad x \leq 3 \\ x^2 & , \quad 3 < x < 10 \end{cases}$$

(α′) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(β′) Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-1), f(3)$ και $f(5)$

(γ′) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 25$

30. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{A} = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}\right)$$

(α′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β′) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

31. (α′) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(β′) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

32. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{A} = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$$

(α′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β′) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} - 6 = 0$

33. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{A} = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$$

(α′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β′) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} = 2\left(10 - \sqrt{5}\right)$

34. Δίνεται η παράσταση:
$$\mathrm{A} = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$$

(α′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β′) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + 1 = 0$

35. Δίνεται η παράσταση:
$$\mathrm{B} = \sqrt[5]{(x-2)^5}$$

(α′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(β′) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{B}^2 + 6\mathrm{B} = \mathrm{B}^4$

36. Δίνονται οι αριθμοί:
$$\mathrm{A} = \left(\sqrt{2}\right)^6 \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$$

(α′) Να δείξετε ότι: $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 4$

(β′) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
$$\sqrt{2}\ ,\ 1\ ,\ \sqrt[3]{2}$$

37. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί την σχέση: $|x+1| < 2$, τότε:

(α′) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(β′) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:
$$\mathrm{K} = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$$
είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

38. Δίνεται η παράσταση:
$$\mathrm{A} = |x-1| + |y-3|$$
με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει:
$$1 < x < 4 \quad \text{και} \quad 2 < y < 3$$
Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\mathrm{A} = x - y + 2$

(β′) $0 < \mathrm{A} < 4$

39. (α′) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $x^2 - 5x + 6$

(β′) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$$

i. να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης.

ii. να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in$Α ισχύει: $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x-3}$

40. Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μία μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:
Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι άσπρη
Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη
Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι πράσινη

(α′) Χρησιμοποιώντας τα ενδεχόμενα Α,Κ και Π να γράψετε στην γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:
$i)$ η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη
$ii)$ η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη

(β′) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του προηγούμενου ερωτήματος.

41. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\text{Α} = \frac{1+x}{x-1} \quad \text{και} \quad \text{Β} = \frac{2}{x^2-x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α και Β πρέπει:

$$x \neq 1 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

(β′) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: Α = Β

42. (α′) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$

(β′) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2} = 0$

43. Δίνεται η παράσταση:

$$\text{Α} = |3x-6| + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, Α $= 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$, Α $= 8 - 3x$

(β′) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

44. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $a_2 = 0$, $a_4 = 4$

(α′) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $a_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και a_1 ο πρώτος όρος της.

(β′) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $a_\nu = 2\nu - 4, \nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

45. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ax + \beta \quad , \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

(α′) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6), B(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των a, β.

(β′) Αν $a = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

46. (α′) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x, 2x+1, 5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(β′) Να βρείτε τον λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

47. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \geq 5$

(β′) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(γ′) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

48. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , \quad x < 0 \\ x - 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(α′) Να δείξετε ότι: $f(-1) = f(3)$

(β′) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$

49. (α′) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x + 2, (x+1)^2, 3x + 2$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(β′) Να βρείτε την διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

50. Δίνεται η εξίσωση:

$$\left(\lambda^2 - 1\right) x = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(β′) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

51. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

(α′) Να εκφράσετε με μία αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(β′) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(γ′) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

52. (α′) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$

(β′) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

53. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και $a_{10} - a_6 = 24$

(α′) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$

(β′) Να βρείτε τον a_{20}

(γ′) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

54. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{K} = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$$

(α′) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2 - 3x - 2$

(β′) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ′) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

55. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{a+\beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι: $a = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

(β′) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{a\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

56. (α′) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$

(β′) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

57. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5| < 4$

(β′) Αν κάποιος αριθμός a επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < 1$$

58. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y} = -2$

(α′) Να αποδείξετε ότι $y = 2x$

(β′) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

59. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$$

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(β′) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$

60. Οι αριθμοί $\mathrm{A} = 1, \mathrm{B} = x+4, \Gamma = x+8$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

(α′) Να βρείτε την τιμή του x.

(β′) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν), τότε:

i. να υπολογίσετε την διαφορά ω.

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

61. (α′) Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(β′) Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(γ′) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

62. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

(α′) Να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(β′) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

63. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(β′) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού a, ώστε το σημείο $M\left(a, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

64. Δίνεται η παράσταση:

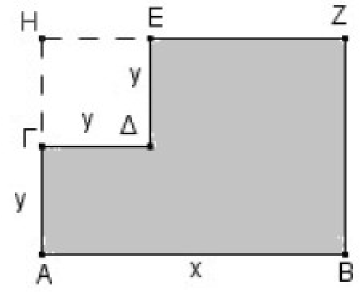
$$\mathrm{A} = |x - 1| - |x - 2|$$

(α′) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $\mathrm{A} = 2x - 3$

(β′) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

65. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

(α′) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από την σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(β′) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

66. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$$

(α′) Να δείξετε ότι:

i. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \dfrac{1}{2}$

ii. $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \dfrac{1}{20}$

(β′) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

67. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από την σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

(α′) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(β′) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

68. Δίνεται το τριώνυμο:

$$2x^2 + \lambda x - 5 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Αν μία ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

(β′) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

69. Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0 \quad (1) \quad , \quad \beta > 0$$

(α′) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{2}$

(β′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

70. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\beta x + \left(\beta^2 - 4\right) = 0 \quad (1) \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}$$

(α′) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$

(β′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

71. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P\left(A\right) = \frac{3}{4} \quad , \quad P\left(A - B\right) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P\left(B\right) = \frac{1}{4}$$

(α′) Να υπολογίσετε την $P\left(A \cap B\right)$

(β′) i. να παραστήσετε με διάγραμμα $Venn$ και να γράψετε στην γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: A ή B.

ii. να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

72. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y - 6| \leq 4$$

(α′) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$

(β′) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

73. Δίνεται το τριώνυμο:

$$2x^2 + 5x - 1$$

(α′) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2.

(β′) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

(γ′) Να προσδιορίσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{x_1}$ και $\dfrac{1}{x_2}$.

74. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{K} = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

(α′) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(β′) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση Κ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

75. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 - 16 \leq 0 \quad (2)$$

(α′) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(β′) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

76. Δίνεται ο πραγματικός x για τον οποίο ισχύει: $d\left(x, -2\right) < 1$. Να δείξετε ότι:

(α′) $-3 < x < -1$

(β′) $x^2 + 4x + 3 < 0$

77. Δίνεται το τριώνυμο:

$$-x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x + \sqrt{3}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$

(β′) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

78. (α′) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $3x^2 - 2x - 1$

(β′) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A\left(x\right) = \frac{x - 1}{3x^2 - 2x - 1}$$

και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

(γ′) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|A\left(x\right)\right| = 1$

79. (α′) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $x^2 + 2x - 3$

(β′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f\left(x\right) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στην συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(γ′) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

80. Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:
Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος.
Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3.
Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3.

81. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$
(β′) Δίνεται η παράσταση:
$$\mathrm{A} = |x-3| + \left|x^2 - 10x + 21\right|$$
i. για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $\mathrm{A} = -x^2 + 11x - 24$
ii. να βρείτε τις τιμές του $x \in (3,7)$ για τις οποίες ισχύει $\mathrm{A} = 6$

82. Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου ($°C$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από την σχέση:
$$\mathrm{T} = 15 + 25 \cdot x \quad , \quad \text{όταν } 0 \leq x \leq 200$$
(α′) Να βρείτε την θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(β′) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290°C$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(γ′) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440°C$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

83. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$
(β′) Αν a, β είναι δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3a + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

84. Έστω a, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:
$$a + \beta = 2 \quad \text{και} \quad a^2\beta + a\beta^2 = -30$$
(α′) Να αποδείξετε ότι: $a\beta = -15$

(β′) Να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a, β και να τους βρείτε.

85. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A} = \left(\sqrt{2}\right)^6 \quad , \quad \mathrm{B} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$$

(α′) Να δείξετε ότι: $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 23$

(β′) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

86. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $a_4 - a_2 = 10$

(α′) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(β′) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

87. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 8 - x & , \quad x < 0 \\ 2x + 5 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(α′) Να δείξετε ότι: $f(-5) = f(4)$

(β′) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 9$

88. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 4| \geq 3$

(β′) Αν $a \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A} = ||a + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

89. Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Θεωρούμε τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 4, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$.

(α′) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα $Venn$, με βασικό σύνολο το Ω, τα σύνολα A και B. Κατόπιν να προσδιορίσετε τα σύνολα: $A \cup B, A \cap B, A'$ και B'.

(β′) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
$i)$ Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.
$ii)$ Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B.
$iii)$ Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B.

90. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση τον αριθμό 1, να βρείτε το λ.

(β′) Για $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση.

91. (α′) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$

    (β′) Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

    (γ′) Να τοποθετήσετε το $-\dfrac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\dfrac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

92. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $a_1 = 1$ και $a_3 = 9$

    (α′) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

    (β′) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο ν ώστε να ισχύει $a_\nu > 30$

93. Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία έναν σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
    Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο.
    Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα.
    Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:
    i) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.
    ii) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

94. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = ax + \beta \quad , \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$
    για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$

    (α′) Να δείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 5$

    (β′) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

    (γ′) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

95. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$$

    (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει: $f(x) = x^2 + 4x$

    (β′) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$

96. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

(β′) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 \cdot x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$$

97. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = x + \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

(α′) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1\right) - f\left(2\right)$

(β′) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(x\right) = \frac{5}{2}$

98. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει:

$$4 \leq x \leq 7 \quad \text{και} \quad 2 \leq y \leq 3$$

τότε:

(α′) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(β′) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

99. (α′) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{A} = x^3 - x^2 + 3x - 3$$

(β′) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f\left(x\right) = \frac{3}{x} \quad \text{και} \quad g\left(x\right) = x^2 - x + 3$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A\left(1, 3\right)$

100. (α′) Να αποδείξετε ότι: $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(β′) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$\mathrm{B} = \left|x^2 + 4x + 5\right| - \left|x^2 + 4x + 4\right|$$

101. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^3 \quad \text{και} \quad g(x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

(β′) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το O.

102. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$$

(α′) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(β′) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

(γ′) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

103. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A} = |2x - 4| \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = |x - 3| \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Για κάθε $2 \leq x < 3$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A} + \mathrm{B} = x - 1$

(β′) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

104. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

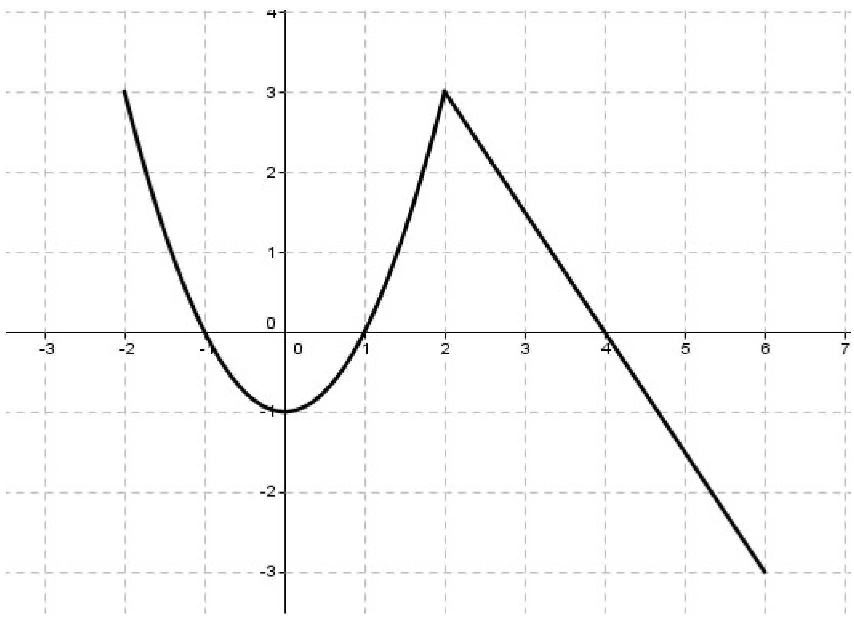
(α′) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(β′) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

(γ′) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(δ′) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.



105. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

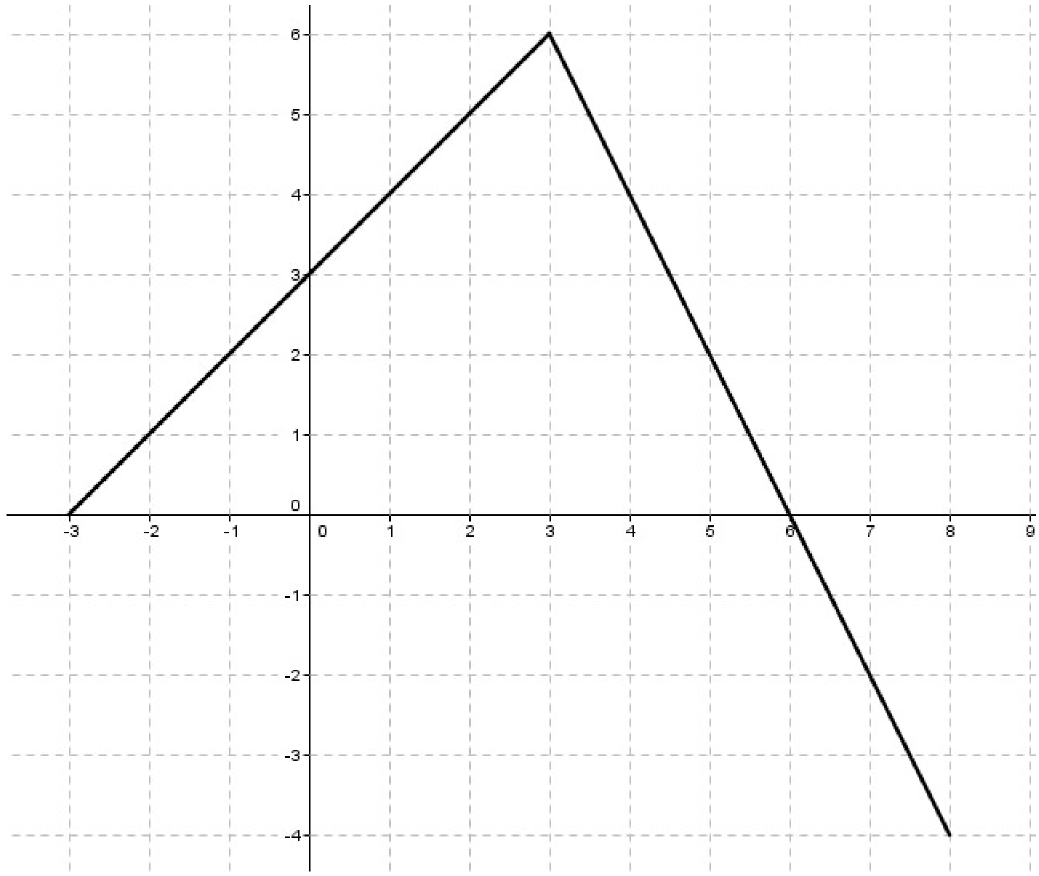
(α΄) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(β΄) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(γ΄) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(δ΄) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.



106. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f\left(x\right) = 3x^2 + 9x - 12 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(β′) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

107. Δίνεται η συνάρτηση g με:

$$g\left(x\right) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$$

Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A\left(1, -4\right)$,

(α′) Να δείξετε ότι $\mu = -6$

(β′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(γ′) Για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

108. Δίνεται η παράσταση:

$$\mathrm{A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

(α′) Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = 4$

(β′) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + \mathrm{A}| = 1$

109. Το 70% μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
A: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο.
M: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

(α′) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
$i)\ \ \mathrm{A} \cup \mathrm{M} \qquad ii)\ \ \mathrm{M} - \mathrm{A} \qquad iii)\ \ \mathrm{M}'$

(β′) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε:
$i)$ να μην έχει μηχανάκι.
$ii)$ να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο.

110. Από τους 180 μαθητές ενός Λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στην θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του Λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
A: ο μαθητής συμμετέχει στην θεατρική ομάδα.
B: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου.

(α′) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
$i)\ \ \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \qquad ii)\ \ \mathrm{B} - \mathrm{A} \qquad iii)\ \ \mathrm{A}'$

(β′) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:
$i)$ να μην συμμετέχει σε καμία ομάδα.
$ii)$ να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου.

111. Οι αριθμοί $\kappa - 2, 2\kappa$ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

(α′) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε τον λόγο λ της προόδου.

(β′) i. να εκφράσετε τον 2$^{\text{ο}}$ όρο, τον 5$^{\text{ο}}$ και τον 4$^{\text{ο}}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1.
ii. να αποδείξετε ότι: $a_2 + a_5 = 4\left(a_1 + a_4\right)$

112. Δίνεται η εξίσωση:
$$\lambda x^2 - (\lambda - 1)\,x - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

(β′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

113. Δίνεται η εξίσωση:
$$(\lambda + 2)\,x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \neq -2$$
Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

(α′) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β′) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

114. Για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύουν:

$$2 \leq a \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

(α′) $a - 2\beta$

(β′) $a^2 - 2a\beta$

115. Έστω a, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$a\beta = 4 \quad \text{και} \quad a^2\beta + a\beta^2 = 20$$

(α′) Να αποδείξετε ότι $a + \beta = 5$

(β′) Να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a, β και να τους βρείτε.

116. Έστω a, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$a + \beta = -1 \quad \text{και} \quad a^3\beta + 2a^2\beta^2 + a\beta^3 = -12$$

(α′) Να αποδείξετε ότι $a\beta = -12$

(β′) Να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a, β και να τους βρείτε.

117. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{K} = 2a^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2a\,(3 - \beta) \quad , \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

(α′) Να δείξετε ότι: $\mathrm{K} - \Lambda = (a^2 + 2a\beta + \beta^2) + (a^2 - 6a + 9)$

(β′) Να δείξετε ότι: $\mathrm{K} \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των a, β.

(γ′) Για ποιες τιμές των a, β ισχύει η ισότητα $\mathrm{K} = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

118. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί a, β με $a \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{a}{\beta}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και β είναι αντίστροφοι.

(β′) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K} = \dfrac{a^{22} \cdot (\beta^3)^8}{a^{-2} \cdot (a\beta)^{25}}$

119. Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α′ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ′ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

(α′) Το πλήθος των μαθητών της Γ′ τάξης.

(β′) Το πλήθος των μαθητών της Β′ τάξης.

(γ′) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β′ τάξης.

120. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d\,(2x, 3) = 3 - 2x$

(α′) Να αποδείξετε ότι: $x \leq \dfrac{3}{2}$

(β′) Αν $x \leq \dfrac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{K} = |2x - 3| - 2\,|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

121. (α′) Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι αριθμοί $x+4, 2-x, 6-x$, με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(β′) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii. τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

122. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

(α′) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

(β′) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{K} = \dfrac{|x+1| + |x-5|}{3}$

123. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$

(α′) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$

(β′) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{K} = \dfrac{|y-1| + |y-3|}{2}$

124. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν:

$$3 \leq x \leq 5 \quad \text{και} \quad -2 \leq y \leq -1$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

(α′) $y - x$

(β′) $x^2 + y^2$

125. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$

(α′) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(β′) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

126. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

(α′) Να δείξετε ότι: $\dfrac{a_{15} - a_9}{a_{10} - a_7} = 2$

(β′) Αν $a_{15} - a_9 = 18$, να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.

127. Δίνεται η εξίσωση:

$$(a+3)\,x = a^2 - 9 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

(α′) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. όταν $a = 1$

ii. όταν $a = -3$

(β′) Να βρείτε τις τιμές του a, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε την λύση αυτή.

128. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $a_4 - a_9 = 15$ και $a_1 = 41$

(α′) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(β′) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $a_\nu = \nu$.

129. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$ ισχύει: $a_6 + a_{11} = 40$

(α′) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

(β′) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

130. (α′) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|2x - 3| \leq 5$

ii. $|2x - 3| \geq 1$

(β′) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

131. (α′) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0 \quad (1)$

(β′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2 \quad (2)$

(γ′) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

132. (α′) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση:

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(β′) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

133. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20cm$ και εμβαδόν $\mathrm{E} = 24cm^2$

(α′) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

(β′) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

134. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί a, β τέτοιοι ώστε:

$$a + \beta = 12 \quad \text{και} \quad a^2 + \beta^2 = 272$$

(α′) Με την βοήθεια της ταυτότητας $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$a\beta = -64$$

(β′) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς a, β.

(γ′) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς a, β.

135. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A} = \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \sqrt[3]{(2-x)^3} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

(β′) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β;

(γ′) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

136. Οι αριθμοί $x + 6, 5x + 2, 11x - 6$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω.

(α′) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

(β′) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των οκτώ πρώτων όρων της.

137. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$$

(α′) Να δείξετε ότι: $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 3$ και $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \frac{1}{2}$

(β′) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α,Β.

138. Αν είναι $\mathrm{A} = \sqrt[3]{5}$, $\mathrm{B} = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

(α′) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\Gamma = \sqrt{15}$

(β′) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α,Β.

139. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει: $\dfrac{a_5}{a_2} = 27$

(α′) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

(β′) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1.

140. Αν είναι $\mathrm{A} = 2-\sqrt{3}$ και $\mathrm{B} = 2+\sqrt{3}$, τότε:

(α′) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = 1$

(β′) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$

141. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda+2)\,x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \neq -2$$

(α′) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$.

142. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|2x-1| < 1$, τότε:

(α′) Να αποδείξετε ότι: $0 < x < 1$

(β′) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1\ ,\ x\ ,\ x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

143. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι: $a_1 = 2$ και $a_5 = 14$

(α′) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(β′) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.
(Δίνεται $\sqrt{1849} = 43$)

144. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, β με $a > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α′) $a + \dfrac{4}{a} \geq 4$

(β′) $\left(a + \dfrac{4}{a}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$

145. (α′) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1 - 2x| < 5$

ii. $|1 - 2x| \geq 1$

(β′) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

146. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$
$$\sqrt{3} \cong 1,73$$
$$\sqrt{5} \cong 2,24$$
$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

(α′) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(β′) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}};$$

ΤΟ ΘΕΜΑ Δ

147. Σε ένα τμήμα της Α′ Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

   (α′) Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη.

      i. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

      ii. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;

   (β′) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

148. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   (α′) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$

   (β′) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

   (γ′) Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$$

149. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9 - x^2}}$$

   (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

   (β′) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

   (γ′) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

150. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0 \quad , \quad \lambda \neq -2$$

   (α′) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$

   (β′) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

   (γ′) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$

(δ′) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης να ισχύει η σχέση:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$$

151. Η εξέταση σε έναν διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στον διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή.

(α′) Να παραστήσετε με διάγραμμα $Venn$ και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

(β′) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:
$i)$ να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.
$ii)$ να βαθμολογηθεί με άριστα.
$iii)$ να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.
$iv)$ να πέρασε την εξέταση.

152. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B \quad , \quad t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και} \quad |t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

(α′) i. Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$

ii. Να βρείτε την σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β′) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i. να γράψετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B
ii. να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

153. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \lambda x + (1 - \lambda) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda \neq 0$$

(α′) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(β′) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(γ΄) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$$

154. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

(α΄) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

(β΄) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στην συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει τον χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι:

$$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

ii. να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του προηγούμενου ερωτήματος, στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(γ΄) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες και να ερμηνεύσετε την σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

155. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από την Α, η τρίτη 7 μέτρα από την Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

(α΄) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον $\nu^{\text{ο}}$ όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

(β΄) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^{η} κυψέλη;

(γ΄) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i. ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^{η} κυψέλη;

ii. ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

156. Δίνεται η εξίσωση:

$$\left(\lambda^2 - \lambda\right) x^2 - \left(\lambda^2 - 1\right) x + \lambda - 1 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού.

(β′) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η (1) παίρνει την μορφή:

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)\,x + 1 = 0$$

(γ′) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(δ′) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού.

157. Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

(α′) Να παραστήσετε με διάγραμμα $Venn$ και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:
i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι.
ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.

(β′) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι.

158. Οι δράστες μίας κλοπής διέφυγαν μ’ ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

(α′) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου.

(β′) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
Α: το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.
Β: το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.
Γ: το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

159. Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο μαθητής πίνει γάλα
Β: ο μαθητής τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

(α′) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:
i) ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
ii) ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
iii) ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα

(β′) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του προηγούμενου ερωτήματος.

160. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

(β΄) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στην συνέχεια να βρείτε.

ii. αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

161. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δύο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

(α΄) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

(β΄) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

(γ΄) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^{η} μέχρι και την 14^{η} σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

162. Για την κάλυψη με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά $d\ cm$ ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)\ cm$.

(α΄) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(β΄) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. την διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii. το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

163. Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από την συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$$

(α΄) Να βρείτε τις τιμές $h(0), h(1)$ και $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

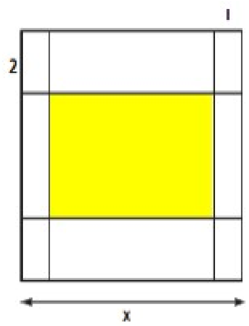
(β΄) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

(γ΄) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5\left[1,21 - (t-1)^2\right]$$

(δ′) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $6{,}05m$.

164. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm με $(5 \leq x \leq 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια $2cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1cm$ δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



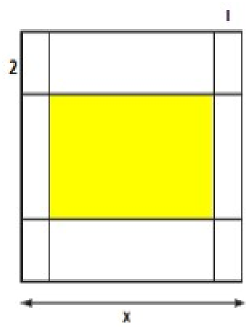
(α′) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από την συνάρτηση:

$$\mathrm{E}\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x-4\right)$$

(β′) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35cm^2$.

(γ′) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24cm^2$.

165. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm με $(5 \leq x \leq 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια $2cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1cm$ δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



(α′) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από την συνάρτηση:

$$\mathrm{E}\left(x\right)=x^2-6x+8$$

(β′) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24cm^2$.

(γ′) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν το πολύ $35cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

166. Για την μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου ($Celsius$), Φαρενάιτ ($Fahrenheit$) και Κέλβιν ($Kelvin$). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π_1 και Π_2:
Π_1: Για να μετατρέψουμε την θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^\circ C$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^\circ F$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.
Π_2: Για να μετατρέψουμε την θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^\circ C$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^\circ K$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^\circ C$) το 273.

(α′) Να εκφράσετε συμβολικά την σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(β′) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει την σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^\circ K$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^\circ F$) είναι η:

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273$$

(γ′) Στην διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $278^\circ K$ μέχρι $283^\circ K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^\circ F$.

167. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

(β′) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ′) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι δύο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$

168. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x - 2| < 3 \quad \text{και} \quad x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

(α′) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(β′) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$

(γ′) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

169. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2 \leq |x| \leq 3 \quad \text{και} \quad x^2 - 4x < 0$$

(α′) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(β′) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$

(γ′) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

170. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x+1| \leq 2 \quad \text{και} \quad x^2 - x - 2 > 0$$

(α′) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(β′) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$

(γ′) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να δείξετε ότι:

$$\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$$

171. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί την σχέση: $d(x,5) \leq 9$

(α′) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(β′) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

(γ′) Να γράψετε την σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του δεύτερου ερωτήματος.

(δ′) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του τρίτου ερωτήματος για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18$$

172. Δίνονται τα σημεία Α,Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$

(α′) Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i. $|x+2|$

ii. $|x-7|$

(β′) Με την βοήθεια του άξονα να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2| + |x-7|$$

(γ′) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

(δ′) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

173. Σε έναν άξονα τα σημεία Α,Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς $5, 9$ και x αντίστοιχα.

(α′) Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: $|x-5|$ και $|x-9|$

(β′) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i. ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

174. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς $3, 7, 11, 15, \ldots$ και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

(α΄) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β΄) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

(γ΄) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ΄) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

175. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(β΄) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i. να βρείτε το $S = x_1 + x_2$

ii. να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

(γ΄) Αν μια ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$

ii. να βρείτε το λ.

176. (α΄) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)\, x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$$

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

177. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\,(x) = ax - a + 2 \quad \text{και} \quad g\,(x) = x^2 - a + 3 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a.

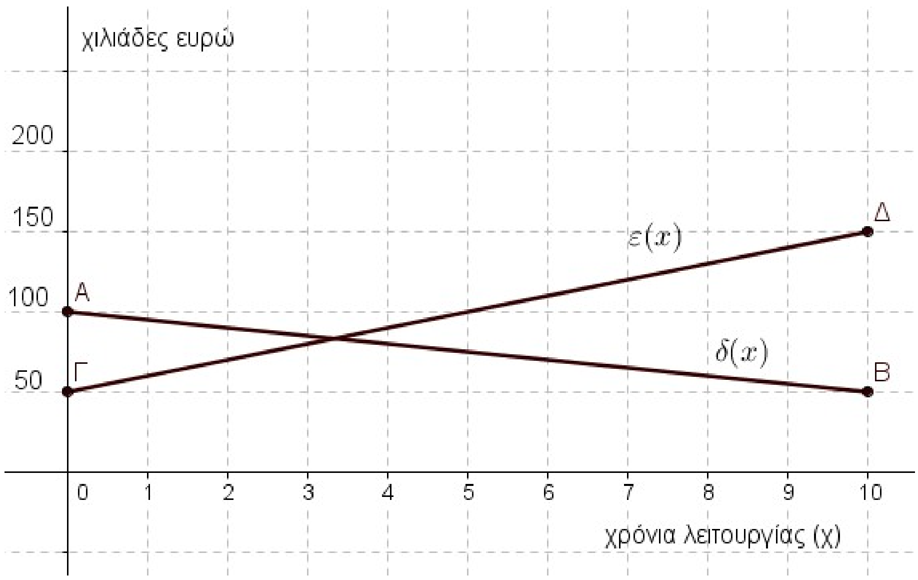
(β′) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i. να βρείτε την τιμή του a.

ii. για την τιμή του a που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ′) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

178. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A\,(0,100)$ και $B\,(10,50)$ παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta\,(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma\,(0,50)$ και $\Delta\,(10,150)$ παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon\,(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



(α′) i. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta\,(x)\,,\varepsilon\,(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα ήταν σωστές.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

179. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δύο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 1 ευρώ, τον 2^o μήνα 2 ευρώ, τον 3^o μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 100 ευρώ, τον 2^o μήνα 110 ευρώ, τον 3^o μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

(α′) i. να βρείτε το ποσό a_ν που πρέπει να κατατεθεί στον λογαριασμό τον ν-οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
ii. να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στον λογαριασμό τον ν-οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
iii. να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
iv. να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(β′) i. τι ποσό θα υπάρχει στον λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;
ii. αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

180. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(β′) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $0 < a < 1$.

i. να βάλετε στην σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0\ ,\ 1\ ,\ a\ ,\ a^2\ ,\ \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με την βοήθεια και του ερωτήματος (α).

ii. να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$

181. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = \frac{x^2 - 5\left|x\right| + 6}{\left|x\right| - 3}$$

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

(β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in$Α ισχύει: $f\left(x\right) = \left|x\right| - 2$

(γ′) Για $x \in$Α, να λύσετε την εξίσωση: $\left(f\left(x\right) + 2\right)^2 - 4f\left(x\right) - 5 = 0$

182. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(γ′) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

183. Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right) x + \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(β′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(γ′) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i. το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

184. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f\left(x\right) = \lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right) x + \lambda \quad , \quad \lambda > 0$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

(β′) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i. να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

ii. να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

iii. για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

185. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\left(x\right) = x^2 - 4x + a \quad \text{και} \quad g\left(x\right) = ax - 5 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

(α′) Αν ισχύει $f\left(2\right) = g\left(2\right)$, να βρείτε την τιμή του a.

(β′) Για $a = 1$,

i. να λύσετε την εξίσωση: $f\left(x\right) = g\left(x\right)$

ii. να λύσετε την ανίσωση: $f\left(x\right) \geq g\left(x\right)$ και με την βοήθεια αυτής να λύσετε την εξίσωση:

$$|f\left(x\right) - g\left(x\right)| = f\left(x\right) - g\left(x\right)$$

186. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(β′) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $a > 1$.

i. να βάλετε στην σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0 \ , \ 1 \ , \ a \ , \ a^2 \ , \ \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με την βοήθεια και του ερωτήματος (α).

ii. να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς:

$$a \ , \ a^2 \ , \ \frac{a+a^2}{2}$$

187. Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους $1m$, με τον ακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1^o λεπτό προχωράει $1cm$, το 2^o λεπτό προχωράει $3cm$ και γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά $2cm$ μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

(α΄) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μηρμύγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο a_ν αυτής της προόδου.

(β΄) Να βρείτε την συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

(γ΄) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

(δ΄) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: το 1^o λεπτό προχωράει $1cm$, το 2^o λεπτό προχωράει $2cm$, το 3^o λεπτό προχωράει $4cm$ και γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i. να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου.

ii. να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση $1cm$.

188. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την συνάρτηση f, με:

$$f(x) = (\lambda+1)\,x^2 - (\lambda+1)\,x + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\,(0,2)$

(β΄) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

(γ΄) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\,(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(δ΄) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

189. (α΄) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(β΄) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad , \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι: αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

190. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(β΄) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$

(γ΄) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει:

$$|2x - 1| < 3$$

τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$

191. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , \quad x < 0 \\ x + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(α΄) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(β΄) i. να χαράξετε την C_f και την ευθεία $y = 3$ και στην συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii. να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ΄) i. για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a, η ευθεία $y = a$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. για τις τιμές του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

192. Δίνεται η εξίσωση:

$$ax^2 - 5x + a = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι αν $|a| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

(β΄) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $a = 2$.

(γ′) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

193. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f\left(x\right)=x^2-2x \quad \text{και} \quad g\left(x\right)=3x-4 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(β′) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

(γ′) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=a$, $a<-1$, βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f.

194. Δίνεται η εξίσωση:

$$\left(x-2\right)^2=\lambda\left(4x-3\right) \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

(α′) Να γράψετε την εξίσωση στην μορφή: $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq0$

(β′) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(γ′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i. να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$

ii. να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A=\left(4x_1-3\right)\left(4x_2-3\right)$$

είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

195. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-\lambda x-\left(\lambda^2+5\right)=0 \quad (1) \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(β′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(γ′) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)=-4$$

196. (α′) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0 \quad (1)$

(β′) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί a, β για τους οποίους ισχύει:

$$a^2-3a\beta-4\beta^2=0$$

i. να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{a}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii. να αιτιολογήσετε γιατί ο a είναι τετραπλάσιος του β.

197. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

(α′) Να αποδείξετε ότι: $a_{20} - a_{10} = 10\omega$

(β′) Αν $a_{20} - a_{10} = 30$ και $a_1 = 1$, να αποδείξετε ότι: $a_\nu = 3\nu - 2$

(γ′) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

(δ′) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

198. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{a}{4}}$$

(α′) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

(β′) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii. να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \dfrac{1}{2}$

199. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(γ′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2$$

200. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(γ′) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$$

201. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(γ′) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$$

να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

202. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(γ′) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι: $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2) \ , \ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ , \ f(x_2 + 1)$$

203. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

(α′) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

(β′) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(γ′) Να γράψετε την σχέση (1) στην μορφή: $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στην συνέχεια:

i. να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

ii. να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ.

204. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \beta x + \gamma = 0 \quad , \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει:

$$|x_1 + x_2| = 4$$

τότε:

(α′) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

(β′) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$

(γ′) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση:

$$x^2 - \beta\,|x| + 3 = 0 \quad (1)$$

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

205. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β′) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(γ′) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i. οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii. $x_1 + 4x_2 \geq 4$

206. Δίνεται το τριώνυμο:

$$ax^2 + \beta x + \gamma \quad , \quad a \neq 0$$

με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

(α′) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι:

$$\gamma = 2a \quad \text{και} \quad \beta = -3a$$

(β′) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $a < 0$

ii. να λύσετε την ανίσωση: $\gamma x^2 + \beta x + a < 0$

207. Δίνεται η εξίσωση:

$$a\beta x^2 - \left(a^2 + \beta^2\right) x + a\beta = 0$$

όπου a, β δύο θετικοί αριθμοί.

(α′) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = \left(a^2 - \beta^2\right)^2$

(β′) Να βρείτε την σχέση μεταξύ των αριθμών a, β, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των a, β.

(γ′) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \dfrac{a}{\beta}$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{a}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$$

208. Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

(α′) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά.

(β′) Με την βοήθεια της σχέσης αυτής:

i. να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012.

ii. να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%.

iii. να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

209. Θεωρούμε το τριώνυμο:

$$f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4 \quad , \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β′) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ′) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και a, β δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$a < x_1 < x_2 < \beta$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $a \cdot f(a) \cdot \beta \cdot f(\beta)$
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

210. Μία μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο φα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από την συνάρτηση:

$$h\left(t\right) = -5t^2 + 10t + 1,05$$

(α΄) Να βρείτε τις τιμές $h\left(0\right), h\left(1\right)$ και $h\left(2\right)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

(β΄) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

(γ΄) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h\left(t\right) = 5\left[1,21 - \left(t-1\right)^2\right]$$

(δ΄) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05m.

211. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού το χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από την συνάρτηση:

$$fx = \begin{cases} 12 + 0,5x & , \quad 0 \le x \le 30 \\ 0,7x + 6 & , \quad x > 30 \end{cases}$$

(α΄) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i. έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

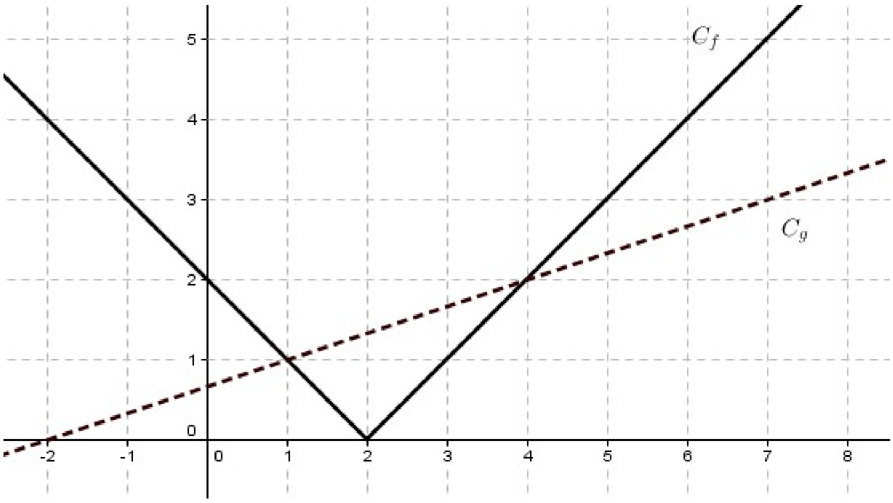
(β΄) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g\left(x\right) = 12 + 0,6x \quad , \quad \text{για } x \ge 0$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στον λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

212. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f\left(x\right) = \left|x-2\right| \quad \text{και} \quad g\left(x\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$



(α′) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

(β′) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(γ′) Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

(δ′) Με την βοήθεια του ερωτήματος (γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$\mathrm{K} = \sqrt{3\,|2-x| - (x+2)}$$

213. Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2 + (2\lambda - 1)\,x + \lambda - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(α′) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(β′) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ.

(γ′) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

214. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f\,(x) = x^2 + 1 \quad \text{και} \quad g\,(x) = x + a \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α′) Για $a = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(β′) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(γ′) Για $a > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

215. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$

(α′) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(β′) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:

i. να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii. να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

216. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-3| \leq 5$

(β′) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση την γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$

(γ′) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση:

$$|x-3| \leq 5$$

(δ′) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση:

$$||x|-3| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

217. (α′) Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

i. να βρείτε για ποιες τιμές του a η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii. να βρείτε την τιμή του a ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

(β′) Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i. να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$

218. Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right) x + \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(β′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(γ′) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ′) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

219. Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right) x + \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(α′) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(β′) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(γ′) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ′) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad 1$$

220. Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2 + \lambda x - 36 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β′) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i. να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

ii. να δείξετε ότι:

A′. $\rho \neq 0$

B′. ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

221. (α′) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(β′) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad , \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$

ii. η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

222. (α′) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34cm$ και διαγώνιο $\delta = 13cm$.

i. να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $\mathrm{E} = 60cm^2$.

ii. να κατασκευάσετε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii. να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(β′) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40cm^2$ και διαγώνιο $8cm$.

223. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

(α′) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε $400km$;

(β′) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

(γ′) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(δ′) Αν:

$$f(x) = 60 + 0,20x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0,10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

224. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (2)$$

(α′) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(β′) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(γ′) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

225. Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 + \beta x + \beta^2 \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}$$

(α′) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(β′) i. αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii. πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (βi), όταν $\beta = 0$;

(γ′) Με την βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$a^2 + a\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

226. (α′) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(β′) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

227. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

(α′) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(β′) Αν $\kappa = -\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ′) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2\left|\mu\right| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

228. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στην χελώνα και τον λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει την χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με ΟΜ>600 μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει την στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με ΟΑ=600 μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο την χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο:

$$s_\Lambda(t) = 10t^2 \text{ μέτρα}$$

ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο την χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο:

$$s_X(t) = 600 + 40t \text{ μέτρα}$$

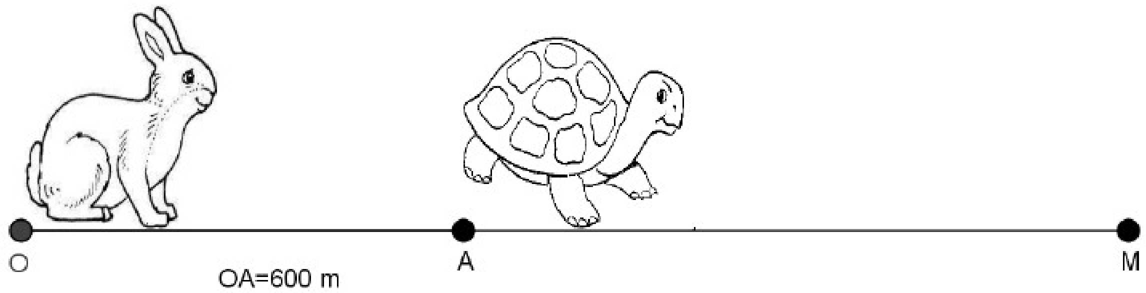
(α′) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

(β′) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ= 2250 μέτρα. Να βρείτε:

i. ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει την χελώνα.

ii. ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται την χρονική στιγμή $t = 12\ min$ και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

iii. ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.



229. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 \quad \text{και} \quad g(x) = |x-1| + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(β΄) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(γ΄) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

230. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(β΄) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(γ΄) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i. να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

231. (α΄) i. να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$

ii. να λύσετε την εξίσωση: $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$

(β΄) i. να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

ii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$\left|x^2 + 9x + 18\right| = -x^2 - 9x - 18$$

232. Στην Α′ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής.

(α′) Να βρείτε την τιμή του x.

(β′) Να αποδείξετε ότι η Α′ τάξη έχει 90 μαθητές.

(γ′) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

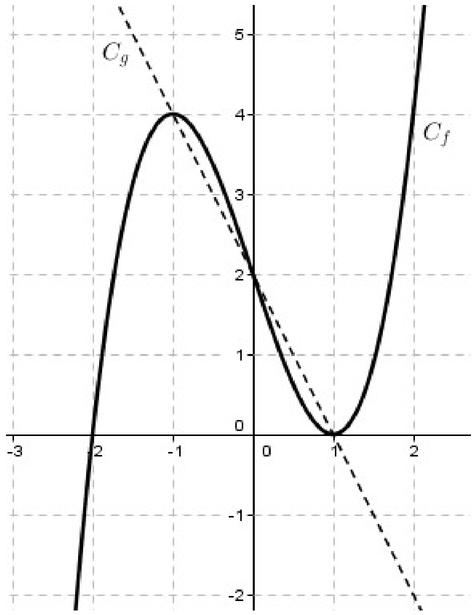
233. Μία ημέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των Μαθηματικών επιλέγει τυχαία έναν μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα.
Β: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία.

(α′) Να παραστήσετε με διάγραμμα $Venn$ και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος.

(β′) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:
$i)$ να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα.
$ii)$ να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δύο μαθήματα.

(γ′) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:
$i)$ να έχει διαβάσει Γεωμετρία.
$ii)$ να έχει διαβάσει Άλγεβρα.

234. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$



Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

(α΄) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $f(x) = -2x + 2$

(β΄) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$

(γ΄) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

(δ΄) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση:

$$A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

235. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 5\lambda x - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β΄) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i. να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

ii. Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2^2$$

236. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \quad , \quad \lambda \in (0, 4)$$

(α′) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii. το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

(β′) Να αποδείξετε ότι: $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$

(γ′) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

237. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0 \quad , \quad \lambda \in (0,2)$$

(α′) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii. το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(β′) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E} \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$

(γ′) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

238. (α′) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$

(β′) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\mathrm{K} = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \dfrac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(γ′) Αν $a \in (-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

239. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια ώστε: $x + y = 10$.

(α′) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(x) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 10x\right) \quad , \quad x \in (0,10)$$

(β′) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}(x) \leq \dfrac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0,10)$

(γ′) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\dfrac{25}{2}$; Τι παρατηρείται τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

240. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα RED χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Μία άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα $YELLOW$ χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

(α′) i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία RED για μία διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία $YELLOW$ για μία διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

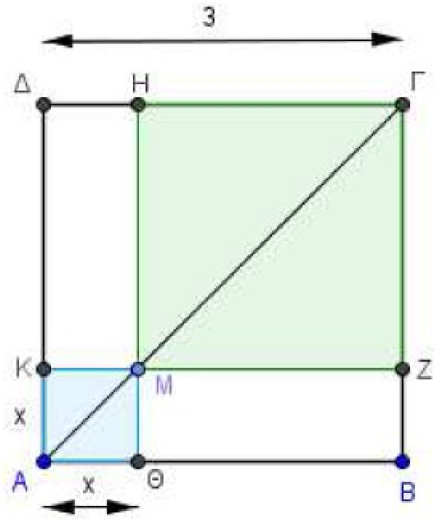
x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3, 2	4, 8

(β′) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$.

(γ′) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας RED είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(δ′) Αν δύο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία RED και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

241. Στο επόμενο σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



(α′) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E} = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$

(β′) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E} \geq \frac{9}{2}$, $x \in (0, 3)$

(γ′) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

242. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών a, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί a, E, β, με την σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(α′) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E} = 1$

(β′) Αν $a + \beta = 10$, τότε:

i. να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τα μήκη a, β.

ii. να βρείτε τα μήκη a, β.

243. Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$ με $x > 0$.

(α′) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με την σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(β′) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με την σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(γ′) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \ldots$ και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \ldots$, τότε:

i. να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

ii. να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει:

$$2\left(S_\nu + 24\right) = \beta_7$$

244. Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 6x + \lambda - 7 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(β′) i. αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

ii. να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ′) i. να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

$$x^2 - 6\left|x\right| + \lambda = 7 \quad (1)$$

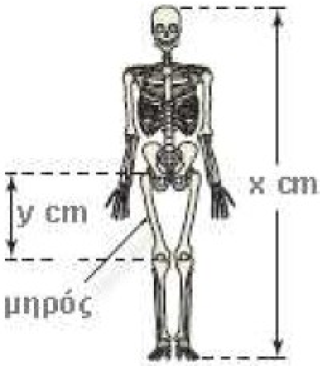
έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii. έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

245. Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν την σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$



(α′) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5cm$ που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(β′) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άνδρα ύψους περίπου $164cm$. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8cm$ που ανήκει σε άνδρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ′) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

246. Οι αριθμοί x^2+5 , x^2+x , $2x+4$, με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α′) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

(β′) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
ii. τον πρώτο όρο της προόδου.
iii. το άθροισμα: $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \ldots + a_{24}$

247. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $a_3 = 8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $a_8 = 23$.

(α′) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $a_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.

(β′) Να υπολογίσετε τον 31^o όρο της.

(γ′) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \ldots + (a_{31} + 31)$$

248. Μια μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα την χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από την σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

(α′) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

(β′) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175m$;

(γ′) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στην διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από $100m$.

249. Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο $s_A, s_B, s_\varGamma$ και $s_\varDelta$ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B$$
$$s_\varGamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} \quad \text{και}$$
$$|s_\varDelta - s_A| = |s_\varDelta - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A,B, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

(α′) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β′) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις:

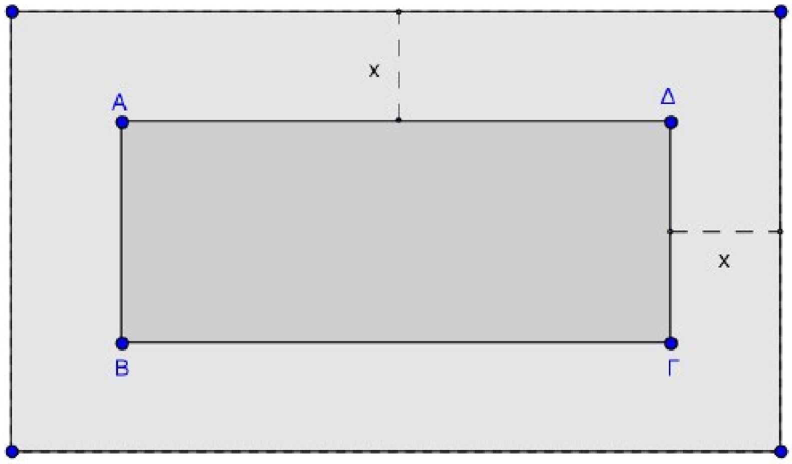
$$s_A + s_B = 1,4 \quad \text{και} \quad s_A \cdot s_B = 0,45$$

τότε:

i. να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B.

ii. να υπολογίσετε τις αποστάσεις $s_A, s_B, s_\varGamma$ και $s_\varDelta$.

250. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\varGamma\varDelta$, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x (σε m) με $x > 0$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(α′) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{E}(x) = 4x^2 + 80x \quad , \quad x > 0$$

(β′) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $\mathrm{E} = 500m^2$.

(γ′) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

251. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40cm$. Αν x (σε cm) είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

(α′) Να αποδείξετε ότι: $0 < x < 20$

(β′) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{E}(x) = 20x - x^2$$

(γ′) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\mathrm{E}(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$

(δ′) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10cm$.

252. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$

(α′) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

(β′) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

(γ′) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$

253. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2x + \lambda = 0 \quad , \quad \lambda < 1$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(β′) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$

(γ′) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$$

τότε:

i. να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$

ii. να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ.

254. Δίνεται η εξίσωση:

$$ax^2 - \left(a^2 - 1\right)x - a = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

(α′) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = \left(a^2 + 1\right)^2$

(β′) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = a$ και $\rho_2 = -\dfrac{1}{a}$

(γ′) Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$

255. Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (*toner*) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

(α′) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ (ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ τον μήνα.

(β′) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα Ε (ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ τον μήνα.

(γ′) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i. να μην έχει ζημιά.

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

256. Δίνεται η ανίσωση:

$$|x + 1| < 4 \quad (1)$$

(α′) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(β′) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(γ′) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$.

257. Δίνεται η ανίσωση:

$$|x-1| \leq 3 \quad (1)$$

(α΄) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(β΄) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(γ΄) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

258. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = -x^2+2x+3$$

(α΄) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

(β΄) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

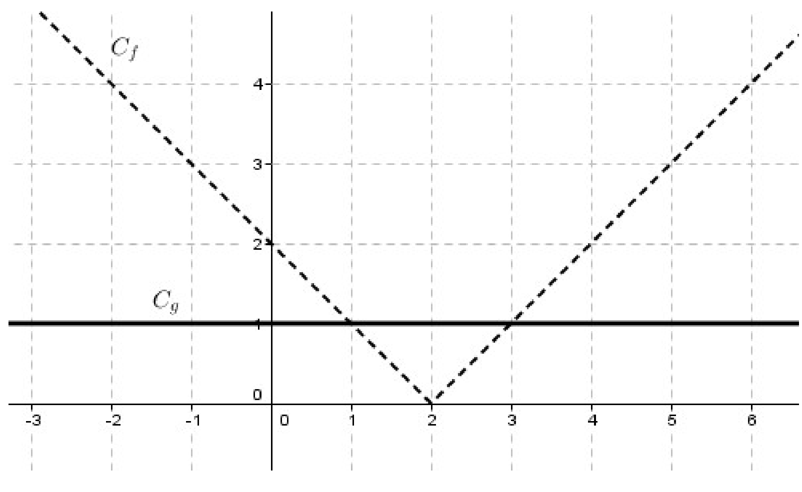
$$f(2,999) \cdot f(-1,002)$$

(γ΄) Αν $-3 < a < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-a^2+2|a|+3$$

259. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$



(α΄) i. να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii. να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g.

(β΄) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(γ΄) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

260. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(a-1)(1-\beta)>0$$

(α′) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των a, β.

(β′) Αν επιπλέον ισχύει $|\beta-a|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{K}=|a-1|+|1-\beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

261. (α′) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$3x^2-14x+8=0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2-14x+3=0 \quad (2)$$

(β′) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2+\beta x+\gamma=0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2+\beta x+a=0 \quad \text{με} \quad a\cdot\gamma\neq 0$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $a\cdot\gamma\neq 0$, τότε:

i. $\rho\neq 0$

ii. ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

262. (α′) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2+1\geq\frac{5}{2}x \quad (1)$$

(β′) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον την σχέση:

$$(\lambda-1)(\kappa-1)<0$$

i. να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

ii. να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\geq\dfrac{3}{2}$

263. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός a που ικανοποιεί την σχέση: $|a-2|<1$

(α′) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του a.

(β′) Θεωρούμε στην συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(a-2)x+\dfrac{1}{4}$

i. να βρείτε την διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii. να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$x^2 - (a-2)\,x + \frac{1}{4} > 0$$

264. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$a_3 = 4 \quad , \quad a_5 = 16 \quad \text{και} \quad \lambda > 0$$

(α΄) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(β΄) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{a_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

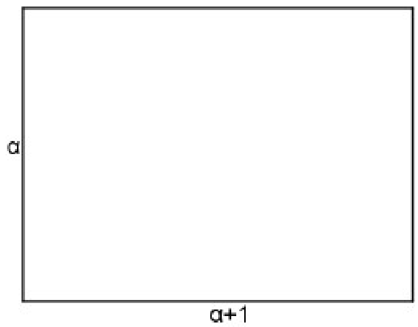
(γ΄) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$

265. (α΄) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$

(β΄) Να λύσετε την ανίσωση: $\left| x - \dfrac{1}{2} \right| > 1$

(γ΄) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές a και $a+1$



όπου ο αριθμός a ικανοποιεί την σχέση $\left| a - \dfrac{1}{2} \right| > 1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $\mathrm{E} < 6$, τότε:

i. να δείξετε ότι: $\dfrac{3}{2} < a < 2$

ii. να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

266. (α΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει: $|x-4| < 2$

(β′) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i. να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii. να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

267. (α′) Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 3x + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(β′) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς a, β διαφορετικούς από το 0 με $a < \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left(a^2 - 3a + 2\right)\left(\beta^2 - 3\beta + 2\right) < 0$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$|(a-1)(\beta-2)| = (a-1)(\beta-2)$$

268. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$$

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x > 2 \\ -x + 3 & , \quad x < 2 \end{cases}$$

(γ′) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(δ′) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 0$

269. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(a+3)x + 3a}{2x - 3} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να αποδειχθεί ότι: $f(x) = 2x - a$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(γ′) Να βρεθεί η τιμή του a αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$

(δ′) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

270. Για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει ότι:

$$|a-2|<1 \quad \text{και} \quad |\beta-3| \leq 2$$

(α′) Να αποδειχθεί ότι: $1<a<3$

(β′) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

(γ′) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2a-3\beta$

(δ′) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{a}{\beta}$

271. Για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει ότι:

- $|1-3a|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

(α′) Να αποδειχθεί ότι: $-\dfrac{1}{3}<a<1$

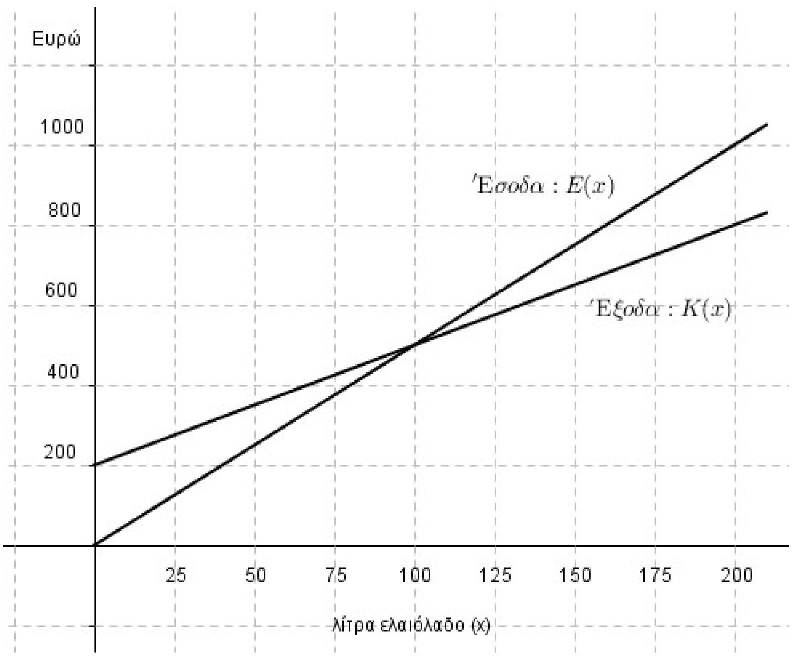
(β′) Να αποδειχθεί ότι: $|\beta-3a-1|<3$

(γ′) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση:

$$fx=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$$

έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

272.



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $\mathrm{K}(x)$ και τα έσοδα $\mathrm{E}(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε έναν μήνα.

(α′) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε την σημασία του.

(β′) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(γ′) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(δ′) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $\mathrm{K}(x)$ και $\mathrm{E}(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

273. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^{η} σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^{η} σειρά έχει 28 καθίσματα.

(α′) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και την διαφορά αυτής της προόδου.

(β′) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(γ′) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(δ′) Αν στην 1^{η} σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στην 2^{η} υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^{η} υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από την 2^{η} και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

   i. να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

   ii. να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.